Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $z^2-2i=0$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x+7$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului MNP, știind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2x-5\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2\dfrac{f'(x)}{f(x)}dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{2014}^{2015}\dfrac{1}{f(x)}dx\leq\dfrac{1}{4}$.

Prof. Ovidiu Bădescu

V139
I/1

Fie $z=1+i$, arătați că

$$z^2-2i=0$$

E1) $z^2-2i=(1+i)^2-2i=$

$=1+2i+i^2-2i=1-1=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V139
I/2

Calculați $(g \circ f)(3)$ dacă $f(x)=x-3$ și $g(x)=x+2015$

E1) $(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=0+2015=2015$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$

V139
5/3

$E_1)$ $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$ $\Big\} \Rightarrow x^2-5x = 3-3x$

deoarece $f(x)=5^x$ e inj.

$E_2) \Rightarrow x^2-2x-3=0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$S_f : x \in \{-1; 3\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/139
I/4

Determinați nr. smț cu 4 elemente pentru $\{1;2;3;4;5\}$

E_1) met I: le scriem pe toate:

$\{1;2;3;4\}$; $\{1;2;3;5\}$; $\{1;2;4;5\}$; $\{1;3;4;5\}$;
$\{2;3;4;5\} \Rightarrow 5$ smț

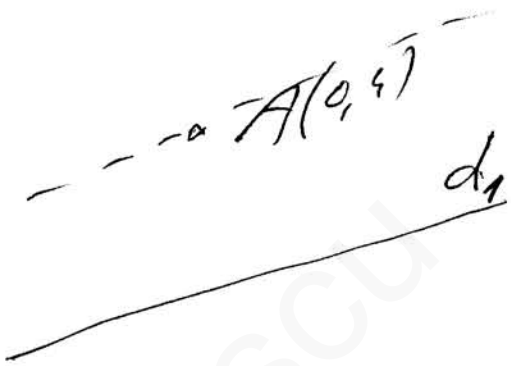
E_2) met II: nr. smț neordonate cu k elemente din n posibile este C_n^k, în cazul nostru este $C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$

Prof. Ovidiu Badescu

V/39
I/5

Fie $A(0,4)$, găsiți ec. dreptei d ce trece prin A și este paralelă cu

$$y = 2x + 7$$



$E_1)$ $d \parallel d_1 \Rightarrow m_d = m_{d_1}$

$E_2)$ $d_1 : y = 2x + 7 \Rightarrow$

$$2x - y + 7 = 0 \Rightarrow m_{d_1} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$E_3)$ $m_d = m_{d_1} \Rightarrow m_d = 2$

$E_4)$ Știm $A(0,4)$, știm $m_d = 2$

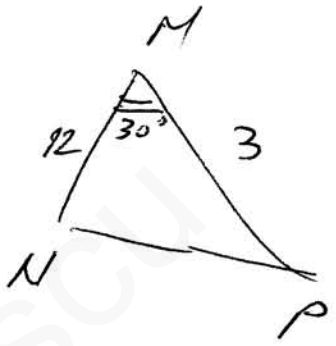
$\Rightarrow$ ec d: $y - y_A = m_d(x - x_A)$

$$\Rightarrow y - 4 = 2(x - 0) \Rightarrow y - 4 = 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{2x - y + 4 = 0}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați A_{MNP} dacă $MN=12$, $MP=3$ și $m(\hat{M})=30^\circ$ V/139 I/6



$E_1)\ A_{MNP}=\dfrac{l_1\cdot l_2\cdot \sin(l_1,\hat{l_2})}{2}$

$A_{MNP}=\dfrac{MN\cdot MP\cdot \sin 30^\circ}{2}$

$A_{MNP}=\dfrac{\overset{6}{\cancel{12}}\cdot 3\cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{2}=\dfrac{18}{2}=9$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/39
I 1a)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$

Arătați că $\det(A(a))=1$

Ex) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ [illegible]

dacă $\det(A(a))=0$

E1) $\det(A(a))=\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2$

E2) $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow 1-a^2=0 \Leftrightarrow a^2=1$

$\Leftrightarrow a=\pm 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V139

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, arătați că

$A(a)\cdot A(b)=A(a+b)+abI_2$

$E_1)\ A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -b\\ -b & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1+ab & -b-a\\ -a-b & ab+1\end{pmatrix}$ (1)

$E_2)\ A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1 & -(a+b)\\ -(a+b) & 1\end{pmatrix}+ab\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & -a-b\\ -a-b & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1+ab & -a-b\\ -a-b & 1+ab\end{pmatrix}$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - mX + 2$, arătați că $f(0) = 2$

E1) $f(0) = 0^3 - m \cdot 0 + 2$

$\Rightarrow f(0) = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V139
II 26)

Fie $f = X^3 - mX + 2$, găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă restul lui $f : (X^2 + X - 2)$ este 0

$E_1)$ $X^3 - mX + 2 \,\big|\, X^2 + X - 2$

$-X^3 - X^2 + 2X$ $\quad\quad X - 1$

$-X^2 + X(2-m) + 2$

$X^2 + X - 2$

$X(2 - m + 1)$

$E_2)$ restul este $(3-m)X$ și restul este 0

$\Leftrightarrow m = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V139

Fie $f = X^3 - mX + 2$, arătați că

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, $\forall m \in \mathbb{R}$ cu x_1, x_2, x_3 rădăcini.

E_1) x_1 rădăcină $\Rightarrow x_1^3 - 3x_1 + 2 = 0$

x_2 rădăcină $\Rightarrow x_2^3 - 3x_2 + 2 = 0$

x_3 rădăcină $\Rightarrow x_3^3 - 3x_3 + 2 = 0$

E_2) adunăm $\Rightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 3(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 0$ (*)

E_3) Din VIETE, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

și înlocuim în (*)

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3 \cdot 0 + 6 = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=e^x-x-1$, arătați că

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

$E_1)$ $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

$E_2)$ $f'(x)=(e^x-x-1)'=e^x-1\Rightarrow f'(0)=e^0-1=0$

$E_2)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$, arătați că $f\searrow$ pe $(-\infty;0]$

$E_1)$ $f'(x)=e^x-1$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$

$E_3)$

x		0
f'		0
f		

$f'(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(-\infty;0)$

$\Rightarrow f_\Delta\searrow$ pe $(-\infty;0)$

Prof. Ovidiu Badescu

V139
II 1c)

Fie $f(x) = e^x - x - 1$, arătați că

$$e^x \geq x+1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

E_1) Facem tabel de variație al lui f

E_2) $f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

E_3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		0		$\nearrow$

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ pe } (-\infty; 0)$$

$$\Rightarrow f \searrow \text{ pe } (-\infty; 0)$$

$$f'(1) = e - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ pe } (0; \infty)$$

$$\Rightarrow f \nearrow \text{ pe } (0; \infty)$$

$$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

E_4) Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

V139
III 2a)

Fie $f(x)=x^2-2x+5$, arătați că

$$\int_0^1 (f(x)+2x-5)\,dx=\frac{1}{3}$$

E1) $I=\int_0^1 (x^2-2x+5+2x-5)\,dx=$

$=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

(1139

Fie $f(x)=x^2-2x+5$, calculați $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ III 26)

E1) ∃ formula $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|\Big|_a^b$

E2) în cazul nostru,

$$I=\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|\Big|_0^2 = \ln|f(2)|-\ln|f(0)|=$$

$$=\ln|5|-\ln|5|=0$$

Prof. Ovidiu Badescu

V139
III 10)

Fie $f(x)=x^2-2x+5$, arătați că

$$\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \frac{1}{4}$$

E_1) $f(x)=x^2-2x+5$ îi căutăm punctele de extrem

$f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

E_2)

x		1	
f'	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\searrow$	4	$\nearrow$

$f'(-1)=-2-2=-4<0 \Rightarrow f'(x)<0, x\in(-\infty,1)$

$\Rightarrow f \searrow, x\in(-\infty,1)$

$f'(2)=4-2=2>0 \Rightarrow f'(x)>0, x\in(1,\infty)$

$\Rightarrow f \nearrow, x\in(1,\infty)$

$f(1)=4$

E_3) Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{4} \;/ \int_{2014}^{2015} \ldots\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}\,dx \leq \int_{2014}^{2015} \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_{2014}^{2015} =$$

$$= \frac{1}{4}(2015-2014) = \frac{1}{4} \Rightarrow I \leq \frac{1}{4}$$

Prof. Ovidiu Bârsescu