**Examenul de bacalaureat național 2015**

**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați $(2-3i)(2+3i)$, unde $i^2=-1$.

**5p** **2.** Calculați $f(f(3))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2+17\right)=\log_3 81$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,a)$, $B(3,2)$ și $C(2,1)$. Determinați numărul real $a$ pentru care punctele $A$, $B$ și $C$ sunt coliniare.

**5p** **6.** Se consideră $E(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{2}$, unde $x$ este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

**5p** **b)** Determinați numerele reale $a$ pentru care $\det(A(a))=0$.

**5p** **c)** Rezolvați în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $A(2)\cdot X=A(8)$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

**5p** **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

**5p** **b)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Calculați $1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{2015}$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$.

**5p** **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați ca funcția $f$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$, are aria egală cu $4+\ln a$.

V138

Calculați: $(2-3i)/(2+3i)$

---

$\in_1)\ N = (2-3i)/(2+3i) = 2^2 - (3i)^2 =$

$= 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $f(f(3))$ știind că $f(x)=2x-1$

V138
7/2

---

$E_1)$ $f(f(3))=f(2\cdot 3-1)=f(5)=2\cdot 5-1$

$\Rightarrow f(f(3))=9$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(x^2+17) = \log_3 81$$

---

$E_1$) nu punem condiții, soluțiile posibile se verifică în ec. inițială

$E_2$) $\log_3(x^2+17) = \log_3 81$

Deoarece $f(x) = \log_3 x$ e injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+17 = 81 \Rightarrow x^2 = 81-17$

$\Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$ sol posibile

$E_3$) $x = 8 \Rightarrow \log_3(64+17) = \log_3 81$ adev.

$\Rightarrow x = 8$ soluție

$x = -8 \Rightarrow \log_3(64+17) = \log_3 81$ adev

$\Rightarrow x = -8$ soluție

$E_4$) $S_f$: $x \in \{-8; 8\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți probabilitatea ca alegând un V138
I/4
m din mț nr. naturale de 2 cifre, acesta
să fie divizibil cu 5

---

$E_1)\ P = \dfrac{\text{n. caz favorabile}}{\text{n. caz posibile}}$

$E_2)$ n. caz posibile: toate nr. de 2 cifre de forma $\overline{ab}$ cu $a \to 9v$, $b \to 10v$, indep $\Rightarrow$ 90 numere

$E_3)$ n. caz favorabile: $\overline{ab} : 5 \Rightarrow$
$a \to 9v$, $b \to 2v$, indep $\Rightarrow 9 \cdot 2 = 18$ nr.

$E_4)\ P = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$

Prof. Ovidiu Băcescu

V/38

Fie $A(1,a)$, $B(3,2)$, $C(3,1)$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $A, B, C$ coliniare

---

$E_1)$ $A, B, C$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2+3+2a-4-1-3a=0$

$\Rightarrow 0-a=0 \Rightarrow a=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138

Fie $E(x) = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{2}$, arătați că 5/6

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

---

$E_1)$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}$

$E_2)$ $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$E_3)$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
II 1a)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 2a & 4 \end{pmatrix}$, arătați că

$$A(1)+A(-1)=2A(0)$$

---

$E_1)$ $A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $2A(0)=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow A(1)+A(-1)=2A(0)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 2a & 4 \end{pmatrix}$, găsiți a dacă (1.6) 1/138

$$\det(A(a))=0$$

---

$E_1)$ $\det(A(a))=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2a \\ 2a & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4-4a^2=0 \Rightarrow 4a^2=4 \Rightarrow a^2=1$

$\Rightarrow a=\pm 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 2a & 4\end{pmatrix}$, rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ec. $A(2)\cdot X=A(8)$

$E_1$) x este rezolv în $M_2(\mathbb{R})\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$E_2$) $A(2)\cdot X=A(8)\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 16\\ 16 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+4z & y+4t\\ 4x+4z & 4y+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 16\\ 16 & 4\end{pmatrix}$$

$E_3$)
$$\begin{cases}x+4z=1\\ y+4t=16\\ 4x+4z=16\\ 4y+4t=4\end{cases}\quad (S_1)\begin{cases}x+4z=1\\ 4x+4z=16\end{cases}\Rightarrow\quad (S_2)\begin{cases}y+4t=16\\ 4y+4t=4\end{cases}$$

$E_4$) $(S_1)\begin{cases}x+4z=1\\ 4x+4z=16\end{cases}$

$(4)-(1)\cdot 4:\ -3x=-15\Rightarrow x=3$ înlocuim $x+4z=1$

$\Rightarrow 3+4z=1\Rightarrow z=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{x=3},\ \boxed{z=-\frac{1}{2}}$

$E_5$) $(S_2)\begin{cases}y+4t=16\\ 4y+4t=4\end{cases}$

$(2)-(1):\ -3y=12\Rightarrow y=-4$ înlocuim în

$y+4t=16\Rightarrow -4+4t=16\Rightarrow t=5\Rightarrow \boxed{y=-4},\ \boxed{t=5}$

$E_6$) $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -1/2 & 5\end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Băcescu

V/138
I 2a)

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, arătați că $(-3) \circ 3 = 3$

---

$E_1) (-3) \circ 3 = 2 \cdot (-3) \cdot 3 - 6 \cdot (-3) - 6 \cdot 3 + 21$

$= -18 + 18 - 18 + 21 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
II 26)

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, arătați că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$

---

$E_1$) calculăm $2(x-3)(y-3)+3 =$

$= 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 =$

$= 2xy - 6x - 6y + 18 + 3$

$= 2xy - 6x - 6y + 21 = x \circ y$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
II 2c)

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, x știe că $\circ$ asociat și că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$

Calculați $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2015}$

---

$E_1$) din $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3 \Rightarrow$

$3 \circ y = 2 \cdot 0 \cdot (y-3) + 3 \Rightarrow 3 \circ y = 3$

$x \circ 3 = 2(x-3) \cdot 0 + 3 \Rightarrow x \circ 3 = 3$

$E_2$) $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2015} =$

$= (\underbrace{1 \circ \sqrt{2} \circ \ldots \circ \sqrt{8}}_{x}) \circ \sqrt{9} \circ (\underbrace{\sqrt{10} \circ \ldots \circ \sqrt{2015}}_{y})$

$\overset{x \circ 3 = 3}{\underset{\circ \text{ asociat}}{=}} 3 \circ (\sqrt{10} \circ \ldots \circ \sqrt{2015}) \overset{3 \circ y = 3}{\underset{\circ \text{ asociat}}{=}} 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/138
II 1a)

Fie $f(x) = 3e^x + x^2$, arătați că

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$$

---

E1) Cum $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$, în

cazul nostru $l = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

E2) $f'(x) = (3e^x + x^2)' = 3e^x + 2x$

$\Rightarrow f'(0) = 3 \cdot e^0 + 2 \cdot 0 \Rightarrow f'(0) = 3$

E3) $l = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 3$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$, găsiți ec. tg la $G_f$ în $x=0$ de pe $G_f$

V138
III 137

---

$E_1$) ec. tg în $x=\alpha$ este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\Rightarrow$ în $x=0$ : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$E_2$) $f(0)=3e^0+0^2 \Rightarrow f(0)=3$

$E_3$) $f'(x)=(3e^x+x^2)'=3e^x+2x$

$\Rightarrow f'(0)=3e^0+0 \Rightarrow f'(0)=3$

$E_4$) ec. tg: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

devine $y-3=3(x-0)$

$y-3=3x \Rightarrow 3x-y+3=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3e^x+x^2$, arătați V/138
că $f$ convexă pe $\mathbb{R}$

---

$E_1$) Vom arăta că $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_2$) $f'(x)=(3e^x+x^2)'=3e^x+2x$

$E_3$) $f''(x)=(3e^x+2x)'=3e^x+2$

$E_4$) deoarece $\forall b>0 \Rightarrow b^{g(x)}>0 \Rightarrow e^x>0$

$\Rightarrow 3e^x+2>0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f''(x)\geq 0$

$\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

V138
S 2a)

Fie $f(x)=x+\frac{1}{x}$, arătați că

$$\int_1^3 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=4$$

---

E1) $I=\int_1^3 \left(f(x)-\frac{1}{4}\right)dx=\int_1^3 \left(x+\frac{1}{x}-\frac{x}{x}\right)dx=$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^3=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
III 26)

Fie $f(x)=x+\frac{1}{x}$, arătați că

$$\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx = e^2$$

---

E1) $I=\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)e^x dx=$

$$=\int_1^2 x e^x dx$$

E2) Fie $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=\int e^x dx=e^x$

$$\Rightarrow I=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$$

$$=(2e^2-e)-e^x\Big|_1^2=$$

$$=(2e^2-e)-(e^2-e)=2e^2-e-e^2+e=e^2$$

Prof. Ovidiu Badescu

V138
II 20)

Fie $f(x)=x+\frac{1}{x}$, găsiți $a\in\mathbb{R}, a>1$ dacă $A(G_f)$, aria $Ox$ și dreptele $x=1$ și $x=a$ este egală cu $4+\ln a$

---

E1) $A(G_f)=\int_1^a |f(x)|dx=\int_1^a |x+\frac{1}{x}|dx$

E2) $x\in[1;a]\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 0$

E3) $A(G_f)=\int_1^a (x+\frac{1}{x})dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^a+\ln|x|\Big|_1^a=$

$=\frac{a^2-1}{2}+\ln a-\underbrace{\ln 1}_{0}=\frac{a^2-1}{2}+\ln a$

E4) Dar, aria este egală cu $4+\ln a$

$\Rightarrow \frac{a^2-1}{2}+\ln a=4+\ln a$

$\Rightarrow a^2-1=8\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$

E5) dar, $a>1\Rightarrow a=3$

Prof. Ovidiu Băgescu