**Examenul de bacalaureat național 2015**

**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 3**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=3+i$ și $z_2=3-i$. Arătați că numărul $z_1z_2$ este real.

**5p** **2.** Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^3+2x-4}=x$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,...,80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real $a$, știind că punctele $O$, $A$ și $B$ sunt coliniare.

**5p** **6.** Se consideră $E(x)=\cos\frac{x}{2}+\sin x$, unde $x$ este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ x & 2\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$, știind că $A(1)+A(3)=aA(2)$.

**5p** **c)** Arătați că $A(x)A(y)=2A(x+y)+xyI_2$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3xy+6x+6y+10$.

**5p** **a)** Arătați că $2*(-2)=-2$.

**5p** **b)** Arătați că $x*y=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=0$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}+\ln 2$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $m$, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=m$, are aria egală cu $\ln 2$.

V032

Fie $z_1 = 3+i$ și $z_2 = 3-i$, arătați că $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ I/1

---

$E_1)$ $z_1 \cdot z_2 = (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9+1 = 10 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V37
I/2

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $A(1,1) \in G_f$ unde

$f(x) = x + a$

---

$\in$) $A(1,1) \in G_f \Rightarrow f(1) = 1$

$\Rightarrow 1 + a = 1 \Rightarrow a = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x^3+2x-4} = x$$

---

$E_1$) $\sqrt[3]{x^3+2x-4} = x \quad |(\,)^3$

$\Rightarrow x^3+2x-4 = x^3$

$\Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

$E_2$) o verificăm în ec.:

$\sqrt[3]{8+4-4} = 2 \Rightarrow 2=2$ adev

$\Rightarrow x=2$ soluție

Obs.: deoarece e radical de ordin 3 $\Rightarrow$ nu era obligatorie verificarea soluției

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. din $A=\{1;2;3;\dots;80\}$, acesta să fie divizibil cu 7

---

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: nr. de elemente din A adică 80 elemente

$E_3)$ nr. caz favorab: câte nr sunt divizibile cu 7 din mț A

Aceste numere sunt: $M=\{7;14;21;\dots;77\}$ și deci sau le scriem pe toate și le numărăm, sau e mai ușor aritm cu $a_1=7$, $a_n=77$ și $r=7$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow 77=7+(n-1)\cdot 7$

$\Rightarrow 77=7+7n-7 \Rightarrow 7n=77 \mid :7$

$\Rightarrow n=11$

$E_4)$ $P=\dfrac{11}{80}$

V137

Fie $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(2,a)$.

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $O, A$ și $B$ coliniare

---

$E_1)$ $O, A, B$ coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+0+a-4-0-0=0$

$\Rightarrow a-4=0$

$\Rightarrow a=4$

Prof. Ovidiu Badescu

V137
I/6

Fie $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, arătați că

$$E\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{3}$$

---

$E_1)$ $E\left(\frac{4}{3}\right) = \cos\frac{\frac{4}{3}}{2} + \sin\frac{4}{3} = \cos\frac{4}{6} + \sin\frac{4}{3}$

$E_2)$ $E\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, arătați că $\det(A(0)) \neq 4$ ∀ $x \in \mathbb{R}$

---

$E_1)$ $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

V137

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ VT 18

dacă $A(1)+A(3)=a\,A(2)$

---

$E_1)$ $A(1)+A(3)=a\,A(2)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$

$E_2)$ $2a=4 \Rightarrow a=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/137
II/1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, arătați că

$A(x)A(y)=2A(x+y)+xy\,I_2$

---

$E_1)$ $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & y \\ y & 2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 4+xy & 2y+2x \\ 2x+2y & xy+4 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $2A(x+y)+xy\,I_2=2\begin{pmatrix} 2 & x+y \\ x+y & 2 \end{pmatrix}+xy\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 4 & 2x+2y \\ 2x+2y & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 4+xy & 2x+2y \\ 2x+2y & 4+xy \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof Ovidiu Bădescu

V132
II 2a)

Fie $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$, arătați că $2 * (-2) = -2$

---

$E_1)$ $2 * (-2) = 3 \cdot 2 \cdot (-2) + 6 \cdot 2 + 6 \cdot (-2) + 10$

$= -12 + 12 - 12 + 10$

$= -2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V137
II 26

Fie $x*y = 3xy+6x+6y+10$, arătați că

$x*y = 3(x+2)(y+2)-2$

---

E1) $3(x+2)(y+2)-2 =$

$= 3(xy+2x+2y+4)-2 =$

$= 3xy+6x+6y+12-2$

$= 3xy+6x+6y+10 = x*y$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
(120)

Fie $x*y = 3xy+6x+6y+10$, se știe că $x*y = 3(x+2)(y+2)-2$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x*x*x = x$

---

$E_1)$ Din $x*y = 3(x+2)(y+2)-2$ (1)

$\Rightarrow x*x = 3(x+2)(x+2)-2 = 3(x+2)^2-2$

$E_2)$ $x*x*x = \underbrace{\left(3(x+2)^2-2\right)}_{x} * \underbrace{x}_{y} \overset{(1)}{=}$

$= 3\left[3(x+2)^2 \cancel{-2+2}\right](x+2)-2$

$= 9(x+2)^3-2$

$E_3)$ ec. este $x*x*x = x$

$\Rightarrow 9(x+2)^3-2 = x$

$\Rightarrow 9(x+2)^3 = x+2$

$E_4)$ not $x+2 = t \Rightarrow 9t^3 = t \Rightarrow t(9t^2-1) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

sau

$t^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x+2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}-2 = -\frac{5}{3} \\ t_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x+2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}-2 = -\frac{7}{3} \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

V132
II 1a)

Fie $f(x)=(x+1)e^x$, arătați că

$$f'(x)=(x+2)e^x$$

---

E) $f'(x)=(x+1)'e^x+(x+1)(e^x)'=$

$=1\cdot e^x+(x+1)e^x=$

$=e^x(1+x+1)=(x+2)e^x$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=(x+1)e^x$, găsiți ec. tangentei (II 15) la $G_f$ în $x=0$

$E_1$) ec. tg în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

$E_2$) ec. tg în $x=0$ este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$E_3$) $f(0)=1\cdot e^0=1$

$E_4$) $f'(0)=?$, $f'(x)=1\cdot e^x+(x+1)e^x$

$\Rightarrow f'(x)=e^x(x+2)\Rightarrow f'(0)=1\cdot 2=2$

$E_5$) înlocuim în $E_2$)

$y-1=2(x-0)\Rightarrow y-1=2x$

$$\Rightarrow \boxed{2x-y+1=0}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V137

Fie $f(x)=(x+1)e^x$, arătați că $f$ este II 1c) convexă pe $[-3;\infty)$

---

$E_1$) $f$ convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

$E_2$) $f'(x)=1\cdot e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$E_3$) $f''(x)=\left((x+2)e^x\right)'=1\cdot e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

$E_4$) $f''(x)=0 \Rightarrow$ $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ sau $e^x=0$ fals

$E_5$)

| $x$ | | $-3$ | |
|---|---|---|---|
| $f''$ | | $0$ | $+\ +\ +\ +$ |
| $f$ | | | $\cup$ |

Dă a găsi semnul lui $f''(x)$, calc.

$f''(0)=3e^0=3>0 \Rightarrow f''(x)\geq 0, \forall x\in[-3;\infty)$

$\Rightarrow f$ convexă pe $[-3;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V137
VI 2a)

Fie $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+1}$, arătați că

$$\int_{-1}^{1} (x^2+1) f(x)\, dx = 0$$

---

E1) $I = \int_{-1}^{1} (x^2+1) \cdot \frac{x^3+3x}{x^2+1}\, dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^3+3x)\, dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} + 3\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} =$

$= \frac{1}{4}\left(1^4 - (-1)^4\right) + 3\left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) =$

$= \frac{1}{4}(1-1) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/137
II 26)

Fie $f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$, arătați că

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}+\ln 2$$

---

$E_1)$ $I=\int_0^1 \frac{x^3+3x}{x^2+1}dx$

$E_2)$ $x^3+3x \;\big|\; x^2+1$

$-x^3-x \quad\quad x$

$2x$

$\Rightarrow \frac{x^3+3x}{x^2+1}=x+\frac{2x}{x^2+1}$

$E_3)$ $I=\int_0^1 x\,dx+\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$

$=\left(\frac{1}{2}-0\right)+\ln|x^2+1|\Big|_0^1=$

$=\frac{1}{2}+(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}+\ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$, găsiți $m>0$ dacă III 2c)
aria dintre $G_g$, axa $Ox$ și dreptele $x=0$ și $x=m$
are aria egală cu $\ln 2$, unde $g(x)=f(x)-x$

---

$E_1)$ $A=\int_0^m |g(x)|dx=\int_0^m \left|\frac{x^3+3x}{x^2+1}-x\right|dx=$

$=\int_0^m \left|\frac{x^3+3x-x^3-x}{x^2+1}\right|dx=\int_0^m \left|\frac{2x}{x^2+1}\right|dx$

$E_2)$ Dar, $m>0$ și $x\in[0;m]\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1}\geq 0$

$E_3)$ $A=\int_0^m \frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^m \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$

$=\ln|x^2+1|\Big|_0^m=\ln(m^2+1)-\ln 1=$

$=\ln(m^2+1)$

$E_4)$ Dar, $A=\ln 2\Rightarrow \ln(m^2+1)=\ln 2$ $\Big\}\Rightarrow$
Cum $h(x)=\ln x$ e injectivă

$\Rightarrow m^2+1=2\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm 1\Big\}\Rightarrow m=1$
Dar, $m>0$

Prof. Ovidiu Badescu