Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(m,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{2}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(2)+xA(3))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-xy-x-y-2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*1=-1$.

5p **b)** Arătați că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)*(2x-3)=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 xf(x)dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu 1.

V136

Găsiți a_2 dacă a_n progr aritm și $a_1=1$ I/1
și $r=2$

$E_1)\ a_n = a_1+(n-1)r$

$\Rightarrow a_2 = a_1+(2-1)r$

$\Rightarrow a_2 = 1+1\cdot 2 \Rightarrow a_2 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
I/2

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $A(m,0) \in G_f$ unde $f(x) = x+1$

$E_1)$ $A \in G_f \Rightarrow f(m) = 0 \Rightarrow m+1 = 0$

$\Rightarrow m = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\log_2(x^2+4) = \log_2 8$ I/3

E_1) Cond.: $x^2+4>0$

E_2) deoarece $f(x) = \log_2 x$ e inj, dein

$\log_2(x^2+4) = \log_2 8 \Rightarrow x^2+4=8$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2$ sol posibile,

le verificăm în ec.

E_3) $x=2$: $\log_2(2^2+4) = \log_2 8$ adev. $\Rightarrow x=2$ sol

$x=-2$: $\log_2((-2)^2+4) = \log_2 8$ adev $\Rightarrow x=-2$ sol

E_4) $S_f: x \in \{-2, 2\}$

Prof. Ovidiu Radescu

V136
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. din $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. cazuri posibile: toate nr. din M, adică 8 cazuri posibile

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr din M care sunt $\vdots 3$ adică $\{3,6\} \rightarrow$ $\rightarrow$ 2 favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\frac{V136}{I/5}$

unde $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) în cazul nostru, $\frac{a+1}{1} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = 1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
I/6

Arătați că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dacă $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

E_1) Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

E_2) Dar, $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x \in C_{dI} \Rightarrow \cos x > 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E_3) Cum $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
II 19)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, arătați că

$$A(2014)+A(2016)=2A(2015)$$

$E_1)$ $A(2014)+A(2016)=\begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $2A(2015)=2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) + (2) $\Rightarrow A(2014)+A(2016)=2A(2015)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
II 18)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, găsiți $a\in\mathbb{R}$ dacă $\det(A(a))=0$

$E_1)$ $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a-3(a-1)=0$

$\Leftrightarrow 2a-3a+3=0 \Leftrightarrow \underline{a=3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, rezolvați în $\mathbb{R}$ II 10)

$$\det(A(2)+xA(3))=0$$

$E_1)$ $A(2)+xA(3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3x & 3x \\ 2x & 2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+2 & 3x+3 \\ 2x+1 & 2x+2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(2)+xA(3))=\begin{vmatrix} 3x+2 & 3x+3 \\ 2x+1 & 2x+2 \end{vmatrix}=$

$=(3x+2)(2x+2)-(2x+1)(3x+3)=$

$=(6x^2+6x+4x+4)-(6x^2+6x+3x+3)=$

$=6x^2+10x+4-6x^2-9x-3=$

$=x+1$

$E_3)$ $\det(A(2)+xA(3))=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x * y = -xy - x - y - 2$, arătați că $(-1) * 1 = -1$

Ex) $(-1) * 1 = -(-1 \cdot 1) - (-1) - 1 - 2 =$

$= 1 + 1 - 3 = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
II 261

Fie $x * y = -xy - x - y - 2$, arătați că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$

E1) Calculăm $-(x+1)(y+1)-1 =$

$= -(xy + x + y + 1) - 1 = -xy - x - y - 2 = x * y$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
II 2c)

Fie $x * y = -xy - x - y - 2$, se știe că $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$, rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$(x+2) * (2x-3) = 5$$

E_1) Folosim $x * y = -(x+1)(y+1) - 1$

$\Rightarrow$ ec. $(x+2) * (2x-3) = 5$

$$-(x+2+1)(2x-3+1) - 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow -(x+3)(2x-2) = 6$$

$$\Leftrightarrow -(2x^2 - 2x + 6x - 6) = 6$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 4x + 6 = 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0$$

E_2) $2x(x+2) = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ sau $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Obs.: se putea rezolva și folosind $x * y = -xy - x - y - 2$ dar calculele erau mai complicate

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x)=x^4-8x^2+16$, arătați că III1a)

$$f'(x)=4x(x-2)(x+2)$$

E1) $f'(x)=4x^3-16\cdot x=4x(x^2-4)=$

$$=4x(x-2)(x+2)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x)=x^4-8x^2+16$, calculați III, 18)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}$$

E1) $$l=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-8x^2+16-x^4}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^2+16}{x^2+1}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{-16x}{2x}=-8$$

Prof. Ovidiu Badescu

V/136
II/1c)

Fie $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, găsiți coord. pct de pe G_f în care tg la G_f este paralelă cu Ox

---

$E_1)$ $tg \parallel Ox \Rightarrow m_{tg} = m_{Ox}$

$E_2)$ panta tangentei în $x = \alpha$ este $f'(\alpha)$ și panta lui Ox este 0

$E_3)$ $f'(x) = 4x^3 - 16x \Rightarrow f'(\alpha) = 4\alpha^3 - 16\alpha$

$E_4)$ $m_{tg} = m_{Ox} \Rightarrow 4\alpha^3 - 16\alpha = 0 \Rightarrow$

$$4\alpha(\alpha^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{sau} \\ \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2 \end{cases}$$

$E_5)$ $\alpha \in \{0; \pm 2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x}$, arătați că $\int_1^2 x f(x)=\frac{7}{2}$

$\in_1$) $I=\int_1^2 x f(x)dx=\int_1^2 \cancel{x}\cdot\frac{x+2}{\cancel{x}}dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+2x\Big|_1^2=\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)+2(2-1)=$

$=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{7}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x}$, arătați că (II 15)

$F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a f

E_1) F primitivă a $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivab.} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

E_2) evident $F(x)=x+2\ln x+2015$ e derivabilă (1)

E_3) $F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+2\cdot\frac{1}{x}+0$

$=1+\frac{2}{x}=\frac{x+2}{x}=f(x)$ (2)

E_4) Din (1)+(2) $\Rightarrow F$ primitivă a f

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x}$, arătați că graficul III 1c)
funcției $g:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$,
axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$ are
aria egală cu 1

E1) $\mathcal{A}(G_f)=\int_a^b |f(x)|\,dx$, în cazul
nostru se cere $\mathcal{A}(G_g)$ între $x=1$ și $x=e$

E2) $\mathcal{A}(G_g)=\int_1^e |g(x)|\,dx =$

$=\int_1^e \left|\left(\frac{x+2}{x}-\frac{x}{1}\right)\ln x\right| dx =$

$=\int_1^e \left|\frac{2}{x}\ln x\right| dx$

E3) Dar, $x\in[1;e]\Rightarrow \frac{2}{x}>0$ și $x\geq 1\Rightarrow \ln x\geq \ln 1$

$\Rightarrow \ln x\geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x}\ln x\geq 0$

E4) $A=\int_1^e \left(\frac{2}{x}\ln x\right)dx = 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

E5) not $t=\ln x \mid (\,)' \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$ și $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=\ln 1=0 \\ x=e\Rightarrow t=\ln e=1 \end{cases}$

$\Rightarrow A=2\int_0^1 t\,dt = 2\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 1-0=1$