Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real care are partea întreagă -2 și partea fracționară $0,75$.

5p **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}x+4$ cu axa Ox și, respectiv, cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10}=81$.

5p **4.** Determinați numărul natural n pentru care $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=64$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ și $P(3,5)$. Arătați că triunghiul MNP este isoscel.

5p **6.** Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, știind că $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $\det(A(2,0))$.

5p **b)** Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x,-3))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele întregi a și b, știind că $a\circ b=2$.

5p **c)** Calculați $(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=1$.

5p **c)** Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația $\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^4-1$.

Găsiți $x \in \mathbb{R}$ cu $[x] = -2$ și $\{x\} = 0,75$

E1) $x = [x] + \{x\}$

$\Rightarrow x = -2 + 0,75 \Rightarrow \boxed{x = -1,25}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți distanța dintre pct de ∩ ale G_f cu Ox, respectiv Oy unde $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$

E_1) $\cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}x + 4 = 0$

$\Rightarrow -\frac{4}{3}x = -4 \Rightarrow x = \frac{-12}{-4} = 3$

$\Rightarrow A(3; 0)$

E_2) $\cap Oy$: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 4 \Rightarrow f(0) = 4$

$\Rightarrow B(0; 4)$

E_3) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} =$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10} = 81$

$E_1)$ $\frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow$ ec.:

$$(3^{-1})^{2x+10} = 3^4$$

$$\Rightarrow 3^{-2x-10} = 3^4$$

$E_2)$ ar trebui una din afirmațiile:

„ baza $= 3 \neq 1 \Rightarrow -2x-10 = 4$ "

sau

„ $f(x) = 3^x$ injectivă $\Rightarrow -2x-10 = 4$ "

$E_3)$ $-2x-10 = 4 \Rightarrow -2x = 14 \Rightarrow \boxed{x = -7}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $n \in \mathbb{N}$ dacă

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 64$$

E1) Folosim $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

$$\Rightarrow 2^n = 2^6$$

E2) baza $= 2 \neq 1 \Rightarrow \boxed{n = 6}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M(-1;1)$, $N(3;1)$, $P(3;5)$. Arătați că ΔMNP isoscel

$E_1)$ $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (1-1)^2} =$

$= \sqrt{16 + 0} = 4$

$E_2)$ $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (5-1)^2} =$

$= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$E_3)$ $NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (5-1)^2} =$

$= \sqrt{0 + 16} = 4$

$E_4)$ $MN = NP \Rightarrow \Delta MNP$ isoscel

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați raza cercului înscris în $\triangle ABC$ dacă $AB=6$, $AC=8$ și $BC=10$

E1) $r = \frac{S}{p}$ unde S aria
p semiperimetru

E2) $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$

E3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{12 \cdot (12-6)(12-8)(12-10)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} =$

$= \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2} =$

$= 2^3 \cdot 3 = 24$

sau se înmulțeau numerele, apoi desc. factori

E4) $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$

Obs.: în cazul nostru, se obs. că

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic în A

$\Rightarrow A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$

Calculați $\det(A(2,0))$

E1) $\det(A(2,0))=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8+0+0-0-0-0$

$=8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x,a)+A(x,-a)=2xA(1,0)$

$E_1) A(x,a)+A(x,-a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & -a & -a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}$ (1)

$E_2) 2xA(1,0)=2x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x,a)=\begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A(x,-3))=0$

$E_1)\ \det(A(x,-3))=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -3 & -3 \\ 3 & x & -3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3+27-27+9x+9x+9x=0$

$\Leftrightarrow x^3+27x=0$

$E_2)\ x(x^2+27)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ \text{sau} \\ x^2+27=0 \end{cases}$

$\Delta=0-4\cdot 27<0 \Rightarrow$ ec. nu are soluții

$E_3)\ S_f: x=0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x \circ y = 3xy+3x+3y+2$, arătați că

$x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

E1) $3(x+1)(y+1)-1 = 3(xy+x+y+1)-1 =$

$= 3xy+3x+3y+3-1$

$= 3xy+3x+3y+2 = x \circ y$

Obs.: era deajuns dacă scriam

$x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$ și după calcule scriam relație adevărată pt că NU ȘTIM că $x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$

Prof. Ovidiu Badescu

V/135
II 26

Fie $x \circ y = 3xy+3x+3y+2$, să știe că

$x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$

Găsiți $a, b \in \mathbb{Z}$ dacă $a \circ b = 2$

$E_1)$ $a \circ b = 2 \Rightarrow 3(a+1)(b+1)-1 = 2$

$\Rightarrow 3(a+1)(b+1) = 3 \mid :3$

$(a+1)(b+1) = 1$

$E_2)$ $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1,\ b+1 \in \mathbb{Z}$

și din $(a+1)(b+1) = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a+1 = 1 \\ \text{și} \\ b+1 = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a+1 = -1 \\ \text{și} \\ b+1 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{și} \\ b = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = -2 \\ \text{și} \\ b = -2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 3xy+3x+3y+2$, știm că

$x \circ y = 3(x+1)(y+1)-1$, calculați

$(-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2015$ știind că $\circ$ asociativă.

E_1) Obs. că $-1 \circ y = 3(-1+1)(y+1)-1$

$\Rightarrow -1 \circ y = 0-1 \Rightarrow -1 \circ y = -1$

E_2) Din $\circ$ asociativă și $\circ$ asociativă pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (-1) \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2015 =$

$= (-1) \circ \underbrace{(0 \circ 1 \circ \ldots \circ 2015)}_{y \in \mathbb{R}} = -1 \circ y = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$, calculați $f'(x)=?$

E1) $f'(x)=(xe^x-e^x+1)'=x'e^x+x(e^x)'-(e^x)'+0=$

$=1\cdot e^x+xe^x-e^x=xe^x$

$\Rightarrow f'(x)=xe^x$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți ec. asimpt la G_f spre $-\infty$ pt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=xe^x-e^x+1$

$E_1)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-e^x+1) \overset{\infty\cdot 0-\infty+1}{=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-1)+1 \overset{0\cdot\infty+1}{=\!=\!=} 1+\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-1)$

$E_2)$ în cazul $0\cdot\infty$ folosim $f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}$

$\Rightarrow l=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\frac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{e^{-x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=\!=\!=} l'H$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}} \overset{\frac{1}{-\infty}}{=\!=\!=} 0\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=0$ as. oriz spre $-\infty$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x-e^x+1$, găsiți intervalele de monotonie ale lui f

---

$E_1)$ $f'(x)=(xe^x-e^x+1)'=x'e^x+x(e^x)'-(e^x)'+0=$

$=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow xe^x=0\Rightarrow$ $\begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ e^x=0 \text{ fals} \end{cases}$

$E_3)$

x		0	
f'	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, calculăm

$f'(-1)=-1e^{-1}=-\frac{1}{e}<0\Rightarrow f(x)<0$ pe $(-\infty;0)$

$\Rightarrow f\searrow$ pe $(-\infty;0]$

$f'(1)=1e^1=e>0\Rightarrow f(x)>0$ pe $(0;\infty)$

$\Rightarrow f\nearrow$ pe $[0;\infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$, calculați

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1=$$

$$=(1-0)+(1-0)+(1-0)+(1-0)=$$

$$=4$$

Prof. Ovidiu Badescu

V 135
[illegible]

Fie $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$, găsiți o primitivă F pentru f cu $F(-1)=1$

$E_1)\ F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3+3x^2+2x+1)dx$

$=4\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+x+C$

$E_2)\ F(x)=x^4+x^3+x^2+x+C$

$E_3)$ Dar, $F(-1)=1\Rightarrow 1-1+1-1+C=1$

$\Rightarrow C=1$

$\Rightarrow F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

este primitiva cerută

Prof. Ovidiu Badescu

V135
III 2c)

Fie $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1$

Sa se arate: $\forall a\in\mathbb{R}^*$, avem

$$\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=a^4-1$$

$E_1)$ $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx=$

$=4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^a+3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a+2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a+x\Big|_0^a=$

$=a^4+a^3+a^2+a$

$E_2)$ $\int_a^0 f(x)\,dx=\int_a^0 (4x^3+3x^2+2x+1)\,dx=$

$=4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_a^0+3\frac{x^3}{3}\Big|_a^0+2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^0+x\Big|_a^0=$

$=-a^4-a^3-a^2-a$

$E_3)$ $\int_0^a f(x)\,dx+\frac{1}{a}\int_a^0 f(x)\,dx=$

$=a^4+a^3+a^2+a+\frac{1}{a}(-a^4-a^3-a^2-a)=$

$=a^4+a^3+a^2+a-a^3-a^2-a-1=a^4-1$

Prof. Ovidiu Badescu