Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=3$ și rația $r=2$.

5p 2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-2$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4x+5}=1$.

5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, știind că M este mijlocul segmentului BC.

5p 6. Calculați $\operatorname{ctg} a$, știind că $\sin a=\frac{1}{3}$ și $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Calculați $\det(A(3))$.

5p b) Arătați că $A(-2015)+A(2015)=2A(0)$.

5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+aX$, unde $\mathbb{Z}_5=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$ și $a\in\mathbb{Z}_5$.

5p a) Calculați $f(\hat{0})$.

5p b) Determinați $a\in\mathbb{Z}_5$, știind că $f(\hat{3})=\hat{3}$.

5p c) Arătați că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$.

5p a) Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{4}{3}-\ln 2$.

5p c) Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$, $x=1$, are aria egală cu $\frac{1}{2}+\ln(n^2+n)$.

Calculați suma primilor 3 termeni ai unei progr aritmetice dacă $a_1 = 3$ și $r = 2$

E1) $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 3+2 \Rightarrow a_2 = 5$

$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 3+4 \Rightarrow a_3 = 7$

E2) $a_1 + a_2 + a_3 = 3+5+7 = 15$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți coord vârfului parabolei

$f(x) = x^2 + 2x - 2$

E1) $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

E2) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = -\frac{4+8}{4} = -3$

E3) $V(-1; -3)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2-4x+5}=1$$

E_1) Cond.: $x^2-4x+5\geq 0$

E_2) Nu rezolvăm condiția dar soluția obținută se verifică în ecuație

E_3) $\sqrt{x^2-4x+5}=1 \quad (()^2$

$$x^2-4x+5=1 \Rightarrow x^2-4x+4=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=2 \text{ sol. posibilă}$$

E_4) Verificăm în ecuație:

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{4-8+5}=1 \text{ adev}$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ soluție}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți numărul submulțimilor cu trei elemente din $\{1,2,3,4,5\}$

E_1) m. sunt cu k elemente din n posibile când nu contează ordinea este C_n^k,

E_2) în cazul nostru $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} =$

$$= \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(-2,5)$, găsiți lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$ dacă M este mijl lui BC

E_1) M mijl lui $BC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-2+(-2)}{2} = -2 \\ y_M = \frac{1+5}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-2,3)$

E_2) $|\overrightarrow{AM}| = AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16+0} = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $\operatorname{ctg} a$ dacă $\sin a = \frac{1}{3}$ și $a \in (0; \frac{\pi}{2})$

$E_1)$ Folosim $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{9} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$E_2)$ $\cos a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \cos a > 0$

Dar, $a \in (0; \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculați $\det(A(3))$

E1) $A(3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A(3))=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-3=3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, arătați că

$A(2015)+A(-2015)=2A(0)$

$E_1)$ $A(-2005)+A(2005)=$

$=\begin{pmatrix} 2 & -2005 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2005 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $2A(0)=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, găsiți $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A(x)) = x^2$

$E_1)$ $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - x$

$E_2)$ $\det(A(x)) = x^2 \Rightarrow 6 - x = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

$\Rightarrow x \in \{-3; 2\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + 9X \in \mathbb{Z}_5[X]$, calculați:

$f(\hat{0}) =$

E1) $f(\hat{0}) = \hat{0}^3 + 9 \cdot \hat{0} = \hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^3 + aX$, găsiți $a \in \mathbb{Z}_5$ dacă $f(\hat{3}) = \hat{3}$

$E_1)$ $f(\hat{3}) = \hat{3} \Rightarrow \hat{3}^3 + a \cdot \hat{3} = \hat{3}$

$\Rightarrow \hat{27} + \hat{3}a = \hat{3}$

$E_2)$ în $\mathbb{Z}_5$, $\hat{27} = \hat{2}$ (restul împărțirii lui 27 la 5)

$\Rightarrow$ ecuația: $\hat{2} + \hat{3}a = \hat{3}$

$\Rightarrow \hat{3}a = \hat{1}$

$E_3)$

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$

Din tabel $\Rightarrow$ $\boxed{a = \hat{2}}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = X^3 + aX$, arătați că dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$

$E_1)$ $f(\hat{1}) = f(\hat{2}) \Rightarrow \hat{1} + a = \hat{8} + \hat{2}a$

$\Rightarrow a = -\hat{7}$

$E_2)$ Dar, în $\mathbb{Z}_5$ avem $-\hat{7} = -\hat{7} + \hat{10} = \hat{3}$

$\Rightarrow \boxed{a = \hat{3}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$

Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x+\ln x}{x}\right)'=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{x+1-x-\ln x}{x^2}$

$=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$.

Găsiți ec. tg la G_f în $x_0=1$

E_1) Ec. tg la G_f în $x_0=1$ este

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E_2) $f(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=1$

E_3) $f'(1)=?$, $f'(x)=\frac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x+\ln x)}{x^2}=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=1$$

E_4) ec. tg.: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$$y-1=1(x-1)\Rightarrow y-1=x-1$$

$$\Rightarrow y=x\Rightarrow x-y=0$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

Găsiți intervalele de monotonie ale lui f

E1) $f'(x)=\left(\frac{x+\ln x}{x}\right)'=\frac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}$

$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-(x+\ln x)\cdot 1}{x^2}=$

$=\frac{x+1-x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

E2) $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$

E3)

x	0		e
f'	∄	$+$	0
f	∄	↗	

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori

$f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=\frac{1-0}{1}=1>0\Rightarrow f'(x)>0$

$x\in(0;e)\Rightarrow$ **$f\nearrow$ pe $(0;e]$**

$f'(3)=\frac{1-\ln 3}{9}$ nu ajută, $f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=$

$=\frac{1-2\ln e}{e^4}=\frac{1-2}{e^4}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(e;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$f\searrow$ pe $[e;\infty)$**

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$

Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)dx$

E1) $I=\int_0^1\left(x+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\int_0^1 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$, arătați că

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$$

E1) $I = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{x+1}\right) dx$

$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$

$= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx\right) =$

$= \frac{1}{3} + x\Big|_0^1 - \frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{3} + (1-0) - (\ln 2 - \ln 1) =$

$= \frac{4}{3} - \ln 2 + 0 = \frac{4}{3} - \ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$, 2.c)

găsiți $n\in\mathbb{N}^*$ dacă aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$ este $\frac{1}{2}+\ln(n^2+n)$

E1) $\mathcal{A}=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 \left|x+\frac{1}{x+1}\right|dx$

E2) Dar, $x\in[0;1]\Rightarrow x+\frac{1}{x+1}>0\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^1 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx$

E3) $\mathcal{A}=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^1=$

$=\left(\frac{1}{2}-0\right)+(\ln 2-\ln 1)=$

$=\frac{1}{2}+\ln 2$

E4) Din enunț, $\mathcal{A}=\frac{1}{2}+\ln(n^2+n)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}+\ln(n^2+n)=\frac{1}{2}+\ln 2$

$\Rightarrow \ln(n^2+n)=\ln 2\Rightarrow n^2+n=2\Rightarrow$

$n^2+n-2=0\Rightarrow \begin{cases} n_1=1\in\mathbb{N}^* \text{ OK} \\ n_2=-2\notin\mathbb{N} \end{cases}$

$S_p: n=1$

Prof. Ovidiu Badescu