Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c) SESIUNE SPECIALA, 2015
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ şi $z_2=1-3i$. Arătaţi că numărul z_1+z_2 este real.

5p **2.** Calculaţi $(f\circ g)(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-64=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=4x+1$ şi punctul $A(2,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătaţi că $\sin(\pi-x)\sin x-\cos(\pi-x)\cos x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ şi $B(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B\left(x^2+x-2\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=-1$, demonstraţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=4$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătaţi că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)+2x\right)dx=e-1$

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=e-3$.

5p **c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{6}\left(3e^2-19\right)$.

Fie $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1-3i$, arătați că

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$$

E) $z_1 + z_2 = (2+3i)+(1-3i) = 3 \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $(f \circ g)(1)$ dacă $f(x) = x - 1$ și $g(x) = 3x$

E1) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 3 - 1 = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$4^x - 64 = 0$$

$E_1)\ 4^x - 64 = 0 \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3$

$E_2)$ deoarece baza $b > 1$

$\Rightarrow x = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. natural de două cifre, acesta să fie divizibil cu 7

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

$E_2)$ m. caz posibile: toate nr. de 2 cifre

$\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
index

$\Rightarrow$ 90 numere

$E_3)$ favorabile: nr. de 2 cifre ; 7 $\Rightarrow$

$\to \{14; 21; \dots; 98\} \Rightarrow$ progr aritm cu

$a_1 = 14$, $a_n = 98$ și $r = 7$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

$\to 98 = 14 + (n-1)\cdot 7 \to 84 = (n-1)7$

$\Rightarrow 84 = 7n - 7 \to 7n = 91 \to n = 13$

$\Rightarrow$ 13 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{13}{90}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $d: y = 4x + 1$ și $A(2, 0)$. Găsiți ec. dreptei ce trece prin A și e paralelă cu d

---

$E_1)$ $d_1 \parallel d \Rightarrow m_{d_1} = m_d$

$E_2)$ $d: y = 4x + 1 \Rightarrow m_d = 4 \Rightarrow m_{d_1} = 4$

$E_3)$ ec. : $y - y_1 = m(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 0 = 4(x - 2)$

$\Rightarrow y = 4x - 8 \Rightarrow 4x - y - 8 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $\sin(\bar{4}-x)\sin x - \cos(\bar{4}-x)\cos x = 1$

$E_1)$ $\sin(\bar{4}-x) = \underbrace{\sin\bar{4}}_{0}\cos x - \underbrace{\cos\bar{4}}_{-1}\sin x = \sin x$

$E_2)$ $\cos(\bar{4}-x) = \underbrace{\cos\bar{4}}_{-1}\cos x + \underbrace{\sin\bar{4}}_{0}\sin x = -\cos x$

$E_3)$ $\sin(\bar{4}-x)\sin x - \cos(\bar{4}-x)\cos x =$

$= \sin x \cdot \sin x - (-\cos x)\cos x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

met $\bar{4}$: (ai oameni deștepți)

deoarece $\sin a \sin b - \cos a \cos b =$

$= -(\cos a \cos b - \sin a \sin b)$

$= -\cos(a+b)$

$\Rightarrow \sin(\bar{4}-x)\sin x - \cos(\bar{4}-x)\cos x =$

$= -\cos(\bar{4}-b+b) = -\cos\bar{4} =$

$= -(-1) = 1$

Prof. Ovidiu Băăscu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, arătați că $\det A=0$

E1) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-1-0-0$

$=1-1=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}$

Arătați că $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=3B(x)$

$E_1)$ $A\cdot B(x)+B(x)\cdot A=$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2x&0\\2x&0&2x\\0&2x&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}\quad(1)$$

$E_2)$ $3B(x)=3\begin{pmatrix}0&x&0\\x&0&x\\0&x&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3x&0\\3x&0&3x\\0&3x&0\end{pmatrix}\quad(2)$

$E_3)$ din $(1)+(2)\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$

Găsiți $x\in\mathbb{R}$ dacă $B(x)\cdot B(x)\cdot B(x)=B(x^2+x-2)$

$E_1)$ $B(x)\cdot B(x)=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x^2 & 0 \\ x^2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $(B(x)\cdot B(x))B(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & x^2 \\ 0 & 2x^2 & 0 \\ x^2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 2x^3 & 0 \\ 2x^3 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 2x^3 & 0 \end{pmatrix}=B(2x^3)$

$E_3)$ ec. devine $B(2x^3)=B(x^2+x-2)$

$\Leftrightarrow 2x^3=x^2+x-2\Leftrightarrow 2x^3-x^2-x+2=0$

$E_4)$

	x^3	x^2	x	x^0
	2	−1	−1	2
~~1~~	~~2~~	1	0	~~2~~ $\neq 0$
−1	2	−3	2	0

ec devine $(x+1)(2x^2-3x+2)=0\Rightarrow$ $x+1=0\Rightarrow x_1=-1$ sau $2x^2-3x+2=0$

$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{4}\notin\mathbb{R}\Rightarrow S_f: x=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, arătați că $f(0) = m$.

$\in$) $f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + m$

$\Rightarrow f(0) = m$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, $m = -1$ arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = 4$

$E_1)$ $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

$E_2)$ $\frac{\frac{x_2x_3}{1}}{x_1} + \frac{\frac{x_1x_3}{1}}{x_2} + \frac{\frac{x_1x_2}{1}}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} =$

$= \frac{S_2}{S_3}$

$E_3)$ Din VIETE, $S_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

$S_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{m}{1} = -m$

$E_4)$ $\frac{S_2}{S_3} = \frac{2}{-m} = -\frac{2}{m}$

$E_5)$ relația $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = 4$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{2}{m}\right) = 4 \Leftrightarrow -4 = 4m$

$\Leftrightarrow \boxed{m = -1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - 2X^2 + 2X + m$, arătați că f nu are toate rād. reale

E_1) deoarece $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$, folosim:

- dacă $(S_1)^2 - 2S_2 < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rād. reale
- dacă $(S_1)^2 - 2S_2 = 0 \Rightarrow$ toate rădăc. reale posibile ar fi egale cu 0
- dacă $(S_1)^2 - 2S_2 > 0 \Rightarrow$ căutăm altă metodă pt a vedea dacă toate rād sunt reale

E_2) $(S_1)^2 - 2S_2 = \left(-\frac{-2}{1}\right)^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$

E_3) dacă f ar avea toate rād reale atunci din $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ar rezulta

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dar atunci

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$, K.O. cu VIETE

deoarece $S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

$\Rightarrow f$ NU are toate rād reale

Prof. Ovidiu Badescu

V137
II 1a)

Fie $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, arătați că

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)'=\frac{(x^2-x+1)'(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+2x^2+2x-x^2-x-1-(2x^3+x^2-2x^2-x+2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+x^2+x-1-2x^3+x^2-x-1}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, determinați ec. tangentei în $x=0$ știind că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

E_1) ec. tg în $x=\alpha$ este:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-x_\alpha)$$

E_2) în cazul nostru, se cere ec. tg în $x=0$

$$\Rightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

E_3) $f(0)=\frac{0-0+1}{0+0+1}=1$

E_4) $f'(0)=\frac{2(0-1)(0+1)}{(0+0+1)^2}=\frac{-2}{1}=-2$

E_5) ec. tg.: $y-1=-2(x-0)$

$$\Rightarrow y-1=-2x \Rightarrow 2x+y-1=0$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, calculați

$$\lim_{x\to\infty} (f(x))^x$$

E1) $\ell = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^x \underline{\underline{\quad 1^\infty \quad}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - 1\right)^{\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^2-x+1-x^2-x-1}{x^2+x+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-2x}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{-2x}}\right]^{\frac{-2x}{x^2+x+1}\cdot x}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{x^2+x+1}} = e^{-2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = e^x - 2x$, arătați că

$$\int_0^1 (f(x) + 2x)\,dx = e - 1$$

$E_1)$ $I = \int_0^1 (e^x - 2x + 2x)\,dx =$

$= \int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$, determinați primitiva F a lui f cu $F(1)=e-3$

$E_1)$ $F(x)=\int f(x)dx=\int(e^x-2x)dx=$

$=e^x-2\cdot\frac{x^2}{2}+C=e^x-x^2+C$

$E_2)$ Dar, $F(1)=e-3$ și cum
$F(1)=e-1+C$ $\Rightarrow$

$e-3=e-1+C\Rightarrow C=-2$

$E_3)$ $C=-2\Rightarrow F(x)=e^x-x^2-2$ este primitiva cerută

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-2x$, arătați că volumul obținut prin rotirea în jurul lui Ox a G_g este $\frac{\pi}{6}(3e^2-19)$ unde $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$

$E_1)$ $V_{G_g}=\pi\int_a^b g^2(x)\,dx$, în cazul nostru $V_{G_g}=\pi\int_0^1 (e^x-2x)^2\,dx=$

$=\pi\int_0^1 (e^{2x}-4xe^x+4x^2)\,dx=$

$=\pi\left(\int_0^1 e^{2x}\,dx-4\int_0^1 xe^x\,dx+4\int_0^1 x^2\,dx\right)$

$E_2)$ $\int_0^1 e^{2x}\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^0}{2}=\frac{e^2-1}{2}$

$E_3)$ $\int_0^1 xe^x\,dx=?$, $f=x\Rightarrow f'=1$, $g'=e^x\Rightarrow g=e^x$

$\Rightarrow I=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=1e-0-e^x\Big|_0^1=e-e+1=1$

$E_4)$ $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

$E_5)$ $I=\pi\left(\frac{e^2-1}{2}-4\cdot 1+4\cdot\frac{1}{3}\right)=\pi\cdot\frac{3(e^2-1)-24+8}{6}=\frac{\pi(3e^2-19)}{6}$

Prof. Ovidiu Badescu