Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

VARA, 2015

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(2,3)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(B(0)\right)=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B\left(x^2+1\right)B(x)=B\left(x^2+x+1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\frac{1}{x}f(x)dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2=12$

V 156
2/9

E1) $(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)^2=(5+2\sqrt{5}+1)+(5-2\sqrt{5}+1)$

$= 6+6=12$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/136

Calculați $f(1)f(2)f(3)f(4)$ dacă $f(x)=x-3$ I/2

$E_1)$ $f(1)=-2$

$f(2)=2-3=-1$

$f(3)=3-3=0$

$f(4)=4-3=1$

$E_4)$ $f(1)f(2)f(3)f(4)=(-2)(-1)\cdot 0\cdot 1=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/36
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\log_2(x^2-4x+4)=0$

E_1) Cond.: $x^2-4x+4>0$ nu o rezolvăm

E_2) $\log_2(x^2-4x+4)=0 \Rightarrow x^2-4x+4=2^0$

$\Rightarrow x^2-4x+4=1$

$\Rightarrow x^2-4x+3=0$

E_3) $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 2}{2}\begin{matrix}3\\1\end{matrix}$

sunt soluții posibile

E_4) verif. $x_1=3$: $\log_2(9-12+4)=0$

$\Leftrightarrow \log_2 1=0$ adev.

$\Rightarrow x_1=3$ soluție

E_5) verif.: $x_2=1$: $\log_2(1-4+4)=0$

$\log_2 1=0$ adev.

$\Rightarrow x_2=1$ soluție

E_6) S_f: $x\in\{1;3\}$

Prof. Ovidiu Dăescu

V/136
I/4

Găsiți câte nr. impare, de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 2, 3 și 4

$E_1)$ $N = \overline{abc}$, $a, b \in \{2, 3, 4\}$

$c = 3$ (N impar)

$E_2)$ $c = 3 \rightarrow$ 1 variantă

$a \rightarrow$ 2 variante

$b \rightarrow$ 1 variantă

independente

regula produsului: $1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

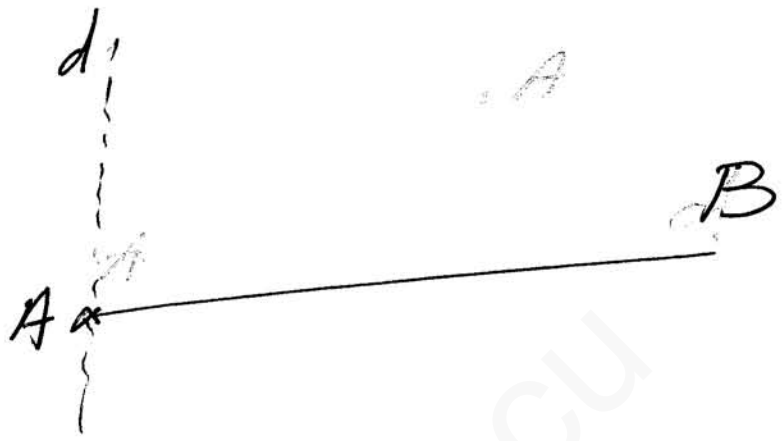
Obs.: se puteau scrie efectiv:

$c = 3 \Rightarrow \overline{abc} = \overline{ab3}$

243 sau 423

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(1;2)$, $B(2;3)$ să se scr. ec. dreptei d V136
ce trece prin A și este perpend. pe AB 1/5



$E_1)$ $d \perp AB$

$\Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

$E_2)$ $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2-1} = 1$

$E_3)$ $m_d \cdot m_{AB} = -1$ și $m_{AB} = 1 \Rightarrow \boxed{m_d = -1}$

$E_4)$ Știm $A(1;2)$, știm $m_d = -1$

$\Rightarrow$ ec. d: $y - y_A = m_d(x - x_A)$

$y - 2 = -1(x-1)$

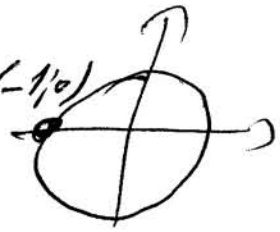
$y - 2 = -x + 1$

$x + y - 3 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ V136 I/6

$E_1)$ $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) =$



$= (\underset{0}{\sin\pi}\cos x - \underset{-1}{\cos\pi}\sin x) +$

$+ (\underset{0}{\sin\pi}\cos x + \underset{-1}{\cos\pi}\sin x) =$

$= (0 + \sin x) + (0 - \sin x) =$

$= 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/136
II 19)

Fie $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(B(0))=1$

$E_1)$ $B(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det B(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
II 95)

Fie $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, - arătați că

$$B(x) + B(y) = 2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$E_1)\ B(x) + B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 3y & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3x+3y & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$E_2)\ 2B\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\frac{x+y}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & x+y \\ 0 & 2 & 0 \\ 3(x+y) & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$E_3)$ Din $(1)+(2) \Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinați $x \in \mathbb{R}$ dacă $B(x^2+1)B(x)=B(x^2+x+1)$

$E_1)$ $B(x^2+1)B(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1+(x^2+1)3x & 0 & x+(x^2+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+1)+3x & 0 & 3x(x^2+1)+1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 3x^3+3x+1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+3 & 0 & 3x^3+3x+1 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $B(x^2+x+1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3(x^2+x+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Egalând (1) cu (2) $\Rightarrow 3x^3+3x+1=1$

$\Leftrightarrow 3x^3+3x=0 \Leftrightarrow 3x(x^2+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x^2+1=0 \\ \Delta<0 \\ \Rightarrow x_{1,2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

$E_4)$ Singura soluție reală este $x=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$, arătați că $(-3) \circ 3 = 3$

E1) $(-3) \circ 3 = \frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$, determinați numerele naturale n dacă $n \circ n = 11$

$E_1)$ $n \circ n = 11 \Rightarrow \frac{1}{2}(n-3)(n-3)+3 = 11 \quad / \cdot 2$

$\Rightarrow (n-3)^2 + 6 = 22 \Rightarrow (n-3)^2 = 16$

$E_2)$ $n-3 = \pm 4 \Rightarrow$ $\begin{cases} n-3 = 4 \Rightarrow n = 7 \in \mathbb{N} \text{ OK} \\ \text{sau} \\ n-3 = -4 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}, \text{ K. O.} \end{cases}$

$E_3)$ $S_f : n = 7$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
I 20)

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$, calculați

$1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2015$

E_1) Din $x \circ y = \frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$, observăm că

$3 \circ y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$ și că

$x \circ 3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$

E_2) Așadar, $x \circ 3 = 3$ și $3 \circ y = 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

E_3) $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2015 = \underbrace{(1 \circ 2)}_{x} \circ 3 \circ \underbrace{(4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2015)}_{y}$

$\overset{x \circ 3 = 3}{=\!=} 3 \circ y \overset{3 \circ y = 3}{=\!=} 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
M 12)

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, arătați că

$$f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$$

E1) $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Prof. Ovidiu Badescu

V136

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, arătați că f este convexă pe $(1;\infty)$ VI 161

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$

$E_2)$ $f''(x)=\left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(-3)'(x-1)^2-(-3)((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=$

$=\frac{0+3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}$

$E_3)$

x			1	
6	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{6}{(x-1)^3}$	$-$	$-$	$\nexists$	$+$

$\Rightarrow \forall x>1 \Rightarrow \frac{6}{(x-1)^3}>0 \Rightarrow f''(x)>0$

$\Rightarrow f$ CONVEXĂ pe $(1;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
III 1 c)

Fie $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$, găsiți coordonatele punctului situat pe G_f, în care tangenta la G_f este paralelă cu $y=-3x$ unde $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$

E_1) Fie $A(\alpha, f(\alpha))$ punctul cerut

E_2) tg la G_f în A este $\parallel$ cu $y=-3x$

$\Rightarrow m_{tg}=m_d$

E_3) Dar, $m_{tg}=f'(\alpha)$

E_4) $m_d=-\frac{a}{b}$ și $d: y=-3x \Rightarrow 3x+y=0$

$\Rightarrow m_d=-\frac{3}{1}=-3$

E_5) $f'(\alpha)=-3$

E_6) Dar, $f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$

E_7) $f'(\alpha)=-3\Rightarrow\frac{-3}{(x-1)^2}=-3\Rightarrow(x-1)^2=1$

$\Rightarrow x-1=\pm 1\Rightarrow$ $\begin{cases} x-1=1\Rightarrow x=2\in\Delta_f\Rightarrow A(2;f(2)) \\ \text{sau} \\ x-1=-1\Rightarrow x=0\notin\Delta_f \end{cases}$ $\Rightarrow A(2;4)=(2;$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136

Fie $f(x) = x e^x$, arătați că

$$\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\,dx = e(e-1)$$

E1) $I = \int_1^2 \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x e^x dx =$

$$= \int_1^2 e^x dx = e^2 - e = e(e-1)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V136
Fie $f(x)=xe^x$, găsiți primitiva F (M.26)
dacă $F(1)=0$

E_1) mulțimea primitivelor este

$$F(x)=\int f(x)dx=\int xe^x dx$$

E_2) $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=\int e^x dx=e^x$

E_3) $F(x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

E_4) Dar, $F(1)=0 \Rightarrow 1\cdot e^1-e^1+C=0$

$\Rightarrow C=0$

$\Rightarrow F(x)=xe^x-e^x=(x-1)e^x$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=xe^x$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$, fie

$I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$, să se arate că

$$I_n+(n+1)I_{n-1}=e,\ \forall n\geq 2$$

E1) $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n\cdot xe^x dx=$

$=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx$

E2) Fie $f(x)=x^{n+1}\Rightarrow f'(x)=(n+1)x^n$

$g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=\int e^x dx=e^x$

E3) $I_n=x^{n+1}e^x\Big|_0^1-\int_0^1(n+1)x^n e^x dx$

$I_n=1\cdot e^1-0-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx$

$I_n=e-(n+1)\int_0^1 x^{n-1}\cdot(xe^x)dx$

$I_n=e-(n+1)\int_0^1 x^{n-1}f(x)dx$

$\Rightarrow I_n=e-(n+1)\cdot I_{n-1}\Rightarrow$

$I_n+(n+1)I_{n-1}=e$

Prof. Ovidiu Bădescu