Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c) TOAMNA REZERVA, 2015
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=2015$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ și $C(4,0)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.

5p **c)** Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Calculați rația lui a_n dacă $a_1 = 1$ și

$a_2 = 2015$

E1) $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_2 = a_1 + (2-1)r$

$\Rightarrow 2015 = 1 + r \Rightarrow r = 2014$

sau, metoda

$a_2 - a_1 = r \Rightarrow 2015 - 1 = r \Rightarrow$

$r = 2014$

Prof. Ovidiu Badescu

V/35
-1/2

Găsiți valoarea maximă pentru

$f:[1;4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$

E_1) Cum $f(x)=ax+b$ este s/ pt $a>0$

$\Rightarrow f(x)=x+1$ e s/ pt că $a=1>0$

E_2)

x	$[1$	$\nearrow$	$4]$
$f(x)$	$[2$	$\nearrow$	$5]$

$f(1)=2$, $f(4)=5 \Rightarrow$ valoarea maximă este 5

Prof. Ovidiu Bădescu

V/35
5/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(x^2-8x)=\log_3 9$$

E_1) Cond.: $x^2-8x>0$

E_2) deoarece $f(x)=\log_3 x$ e injectivă,

din $\log_3(x^2-8x)=\log_3 9 \Rightarrow$

$$x^2-8x=9$$

$$\Rightarrow x^2-8x-9=0$$

E_3) $x_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64+36}}{2\cdot 1}=\dfrac{8\pm 10}{2}\begin{matrix}\nearrow 9\\ \searrow -1\end{matrix}$

$\Rightarrow$ soluții posibile, le verificăm în ec.:

E_4) $x=9$: $\log_3(81-72)=\log_3 9 \Leftrightarrow \log_3 9=\log_3 9$ OK.

$x=-1$: $\log_3(1+8)=\log_3 9$ OK.

$\Rightarrow x=-1$ și $x=9$ soluții

$S_f: x\in\{-1;9\}$

Prof. Ovidiu Badescu

V/35
I/4

Găsiți câte nr. de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii

$$A=\{1;2;3;4\}$$

$E_1)$ $N=\overline{abc}$, cu a,b,c distincte

$E_2)$ $a \rightarrow 4$ v
$b \rightarrow 3$ v
$c \rightarrow 2$ v
indep

$\Rightarrow 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ numere

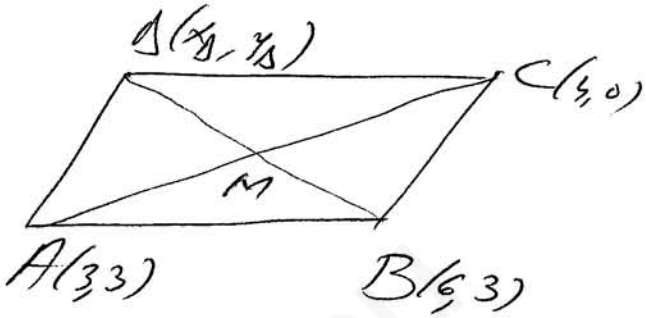
met II: deoarece trebuie să alegem 3 elemente a,b,c din 4 și contează ordinea

$$\Rightarrow A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(3,3)$, $B(6,3)$, $C(4,0)$, găsiți coord. lui Δ dacă $ABC\Delta$ paralelogram

---



E_1) $ABC\Delta$ paralelogram $\Leftrightarrow$ diag au ac. mijloc

E_2) Fie M mijl lui AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} \\ y_M = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

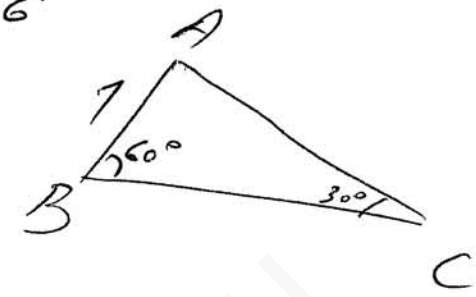
E_3) Dar, M mijl lui $B\Delta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2} = \frac{6 + x_\Delta}{2} \\ \frac{3}{2} = \frac{3 + y_\Delta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 6 + x_\Delta \Rightarrow x_\Delta = 1 \\ 3 = 3 + y_\Delta \Rightarrow y_\Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta(1;0)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați lung. lui BC în $\triangle ABC$ dacă $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$, $C=\frac{\pi}{6}$



E_1) $A+B+C=180^\circ \Rightarrow$

$A+60^\circ+30^\circ=180^\circ \Rightarrow A=90^\circ$

E_2) T sinusurilor: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

alegem $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{1}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V3.5
II 19)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

arătați că $\det(A(1))=1$

$E_1)$ $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det A(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a+1\\ 0 & 1 & a+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, găsiți

$a\in\mathbb{R}$ dacă $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$

$E_1)\ A^2(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a+1\\ 0 & 1 & a+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & a+1\\ 0 & 1 & a+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & a+a & (a+1)+a(a+2)+(a+1)\\ 0 & 1 & (a+2)+(a+2)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 2a & a^2+4a+2\\ 0 & 1 & 2a+4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$E_2)\ A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3\Rightarrow$

$\begin{pmatrix}1 & 2a & a^2+4a+2\\ 0 & 1 & 2a+4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & a & a+1\\ 0 & 1 & a+2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=O_3$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2+4a+2-2a-2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$E_3)\Rightarrow a^2+2a=0\Rightarrow a(a+2)=0\Rightarrow a\in\{-2,0\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, arătați

că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$

$E_1) M_s=A(2)+A(4)+\ldots+A(100)=\sum_{k=1}^{50} A(2k)=$

$=\sum_{k=1}^{50}\begin{pmatrix} 1 & 2k & 2k+1 \\ 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{50}1 & \sum_{k=1}^{50}2k & \sum_{k=1}^{50}(2k+1) \\ 0 & \sum_{k=1}^{50}1 & \sum_{k=1}^{50}(2k+2) \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{50}1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ Dar, $\sum_{k=1}^{50}1=50$, $\sum_{k=1}^{50}2k=2\sum_{k=1}^{50}k=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}=50\cdot51$

$\sum_{k=1}^{50}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{50}k+\sum_{k=1}^{50}1=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}+50=50\cdot52$

$\sum_{k=1}^{50}(2k+2)=2\sum_{k=1}^{50}k+2\sum_{k=1}^{50}1=2\cdot\frac{50\cdot51}{2}+2\cdot50=50\cdot53$

$E_3)$ $M_s=\begin{pmatrix} 50 & 50\cdot51 & 50\cdot52 \\ 0 & 50 & 50\cdot53 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$ (1)

$E_4) M_d=50A(51)=50\cdot\begin{pmatrix} 1 & 51 & 52 \\ 0 & 1 & 53 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 50 & 50\cdot51 & 50\cdot52 \\ 0 & 50 & 50\cdot53 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$ (2)

$E_5)$ Din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Badescu

V135

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, arătați că $f(0) = 2 \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$

$\in_1$) $f(0) = 0 - 4 \cdot 0 + m \cdot 0 + 2$

$f(0) = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V135
II 26)

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $x_1 = x_2 + x_3$

E_1) Din VIETE $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$

Dar, $x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_2 + x_3 = x_1$ și înlocuim

$\Rightarrow x_1 + x_1 = 4 \Rightarrow 2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$

E_2) $x_1 = 2$ rad $\Rightarrow f(2) = 0$

$\Rightarrow 8 - 4 \cdot 4 + 2m + 2 = 0$

$\Rightarrow -6 + 2m = 0 \Rightarrow 2m = 6$

$\Rightarrow m = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V135
II 20)

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 2$, pentru $m = 8$ arătați că f nu are toate rădăcinile reale

---

E_1) $m = 8 \Rightarrow f = X^3 - 4X^2 + 8X + 2$

E_2) Prin (R.A.), presupunem că f are toate rădăcinile reale

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ar trebui să fie ≥ 0

E_3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 \overset{\text{VIETE}}{=} 4^2 - 2 \cdot 8 =$

$= 16 - 16 = 0$

E_4) Cum $x_1^2 \geq 0, x_2^2 \geq 0, x_3^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ și singura posibilitate ca $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ să fie 0 este când $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, dar atunci

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ și din VIETE, $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

K.O. $\Rightarrow f$ nu are toate rădăcinile reale

Prof. Ovidiu Bădescu

V/135
II. 9a)

Fie $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$, arătați că

$$f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$$

E1) $f'(x)=(e^x)'(x^2-6x+9)+e^x\cdot(x^2-6x+9)'=$

$=e^x(x^2-6x+9)+e^x(2x-6)=$

$=e^x(x^2-6x+9+2x-6)=$

$=e^x(x^2-4x+3)$

Prof. Ovidiu Badescu

V/35
XI 13)

Fie $f(x) = e^x(x^2-6x+9)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Găsiți intervalele de monot ale lui f

E1) $f'(x) = e^x(x^2-6x+9) + e^x(2x-6) =$

$= e^x(x^2-6x+9+2x-6) = e^x(x^2-4x+3)$

E2) $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \\ \text{nu} \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \end{cases}$

E3)

x		1		3	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

E4) din tabel $\Rightarrow f$ $\nearrow$ pe $(-\infty; 1]$

$f \searrow$ pe $[1; 3]$

f $\nearrow$ pe $[3; \infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

V135
IV 1c)

Fie $f(x) = e^x(x^2-6x+9)$, arătați că

$$e^x(x-3)^2 \leq 4e, \forall x \in (-\infty; 3]$$

E_1) observăm că $e^x(x-3)^2 = f(x)$

E_2) Facem tabel de variație pt f pe $(-\infty; 3]$

x	$-\infty$		1		3		∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$4e$	$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(x) = e^x(x^2-6x+9) + e^x(2x-6) = e^x(x^2-4x+3)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ $e^x = 0$ fals sau $x^2-4x+3=0 \Rightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

E_3) $f(1) = e^1(1-6+9) = e \cdot 4 = 4e$

E_4) din tabel $\Rightarrow f(x) \leq 4e, \forall x \in (-\infty; 3]$

$\Rightarrow e^x(x-3)^2 \leq 4e, \forall x \in (-\infty; 3]$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/135

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n dx$, arătați ca $I_1 = \frac{3}{4}$

E.1) $I_1 = \int_0^1 (1-x^3)^1 dx = \int_0^1 (1-x^3) dx =$

$= x\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = (1-0) - \left(\frac{1}{4} - 0\right) =$

$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

V 135
III 26)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n dx$

Aratați că $I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$E_1)$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^3)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^3)^n dx =$

$= \int_0^1 \left((1-x^3)^{n+1} - (1-x^3)^n\right) dx =$

$= \int_0^1 (1-x^3)^n (1-x^3-1) dx =$

$= \int_0^1 (1-x^3)^n (-x^3) dx$

$E_2)$ Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow x^3 \in [0;1] \Rightarrow 1-x^3 \geq 0$

$\Rightarrow (1-x^3)^n \geq 0 \quad (1)$

Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow x^3 \in [0;1] \Rightarrow -x^3 \in [-1;0]$

$\Rightarrow -x^3 \leq 0 \quad (2)$

$E_3)$ Din $(1)+(2) \Rightarrow (1-x^3)^n (-x^3) \leq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x^3)^n (-x^3) dx \leq 0 \Rightarrow$

$I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/135
II 20)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^3)^n dx$, arătați că

$$I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4} I_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

E1) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x^3)^{n+1} dx$

E2) $f(x) = (1-x^3)^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1)(1-x^3)^n(-3x^2)$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

E3) $I_{n+1} = x(1-x^3)^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x^3)^n(-3x^2)\cdot x\,dx$

$I_{n+1} = 0 - 0 - 3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)^n(-x^3)dx$

$I_{n+1} = -3(n+1)\int_0^1 (1-x^3)^n(\underbrace{1-x^3}-1)dx$

$I_{n+1} = -3(n+1)\left(\int_0^1 (1-x^3)^{n+1}dx - \int_0^1 (1-x^3)^n dx\right)$

$I_{n+1} = -3(n+1)(I_{n+1} - I_n)$

$I_{n+1} = -3(n+1)I_{n+1} + 3(n+1)I_n$

$I_{n+1} + 3(n+1)I_{n+1} = 3(n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1} = \frac{3(n+1)}{3n+4} I_n$

Prof. Ovidiu Pădescu