Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c) TOAMNA, 2015
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=5$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{4-x}=2^{2x+2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Arătați că $\sin C=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 0\\ -x & 0 & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=1$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$.

Găsiți al treilea termen al progr aritm V135
an dacă $a_1=2$ și $a_2=5$ I/1

$E_1)$ $a_n = a_1+(n-1)r \Rightarrow a_2 = a_1+r$

$E_2)$ înlocuim $\Rightarrow$ $5=2+r \Rightarrow \boxed{r=3}$

$E_3)$ $a_3 = a_1+2r \Rightarrow a_3 = 2+2\cdot 3 = 8$

met II: $a_2-a_1=r \Rightarrow r=5-2 \Rightarrow r=3$

$a_3 = a_2+r \Rightarrow a_3 = 5+3 \Rightarrow a_3=8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $A(3,5) \in G_f$ unde $f(x) = a - x$ V134 I2

$E_1)$ $A(3;5) \in G_f \Leftrightarrow f(3) = 5$

$E_2) \Rightarrow a - 3 = 5 \Rightarrow a = 8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$8^{4-x} = 2^{2x+2}$$

V134
I/3

E1) $8 = 2^3 \Rightarrow$ ec.: $(2^3)^{4-x} = 2^{2x+2}$

$$\Rightarrow 2^{12-3x} = 2^{2x+2}$$

E2) deoarece $b = 2 \neq 1$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 12 - 3x = 2x + 2$$

$$-5x = -10$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Prof. Ovidiu Badescu

Calculați probabilitatea ca alegând un n. de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor 0 V/134 I/4

$E_1)$ $P = \frac{\text{n. caz favorabile}}{\text{n. caz posibile}}$

$E_2)$ n. caz posibile: toate n. de 2 cifre

$\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
independ

$9 \cdot 10 = 90$ numere

$E_3)$ n. caz favorabile: $\overline{ab}$ cu $a \cdot b = 0$

Dar, $a \neq 0 \Rightarrow b = 0$

$a \to 9$ v
$b \to 1$ v $(b=0)$

rest 9 numere

$E_4)$ $P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

Prof. Ovidiu Pădescu

Găsiți ec. dreptei ce trece prin $M(1,1)$ și are panta egală cu 2 $\frac{V139}{I/5}$

E_1) ec.: $y - y_M = m_d(x - x_M)$

E_2) $y - 1 = 2(x-1)$

$y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow \boxed{2x - y - 1 = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V134
I/6

Fie $\triangle ABC$ cu $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$

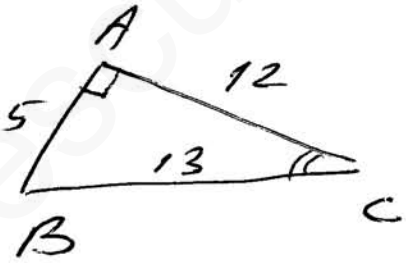
Arătați că $\sin C = \frac{5}{13}$

E_1) se testează dacă $\triangle ABC$ dreptunghic

$AB^2=25$, $AC^2=144$, $BC^2=169$

E_2) Dem. că $AB^2+AC^2=BC^2$

$\Rightarrow m(\hat{A})=90^\circ$

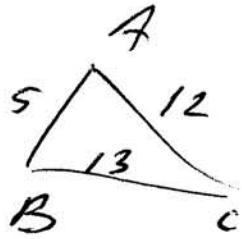


E_3) $\sin C = \frac{\text{cat opus}}{\text{ip}} = \frac{5}{13}$

---

met II: (generală)

T. cos: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



$25=169+144-2\cdot 13\cdot 12\cdot \cos C$

$25=313-2\cdot 13\cdot 12\cos C$

$26\cdot 12\cdot \cos C = 313-25 \Rightarrow \cos C = \frac{288^{72}}{26\cdot 12_3}$

$\Rightarrow \cos C = \frac{72}{26\cdot 3} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

Dar, $\cos^2 C+\sin^2 C=1 \Rightarrow \frac{144}{169}+\sin^2 C=1$

$\sin^2 C = 1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \Rightarrow \sin C = \pm\frac{5}{13}$, $C\in(0,\pi)$ $\Rightarrow \sin C=\frac{5}{13}$

Prof Ovidiu Bădescu

V134
II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(1))=2$

$\in_1)$ $\det A(1)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$

$=0+0+0+2-0-0=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V134
II 18)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$

E1) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-y & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1+2y \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & 0 & (1-x)2y+2x(1+2y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -x(1-y)+(1+2x)(-y) & 0 & -x\cdot 2y+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & 0 & 2y-2xy+2x+4xy \\ 0 & 1 & 0 \\ -x+xy-y-2xy & 0 & -2xy+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1-x-y-xy & 0 & 2(y+xy+x) \\ 0 & 1 & 0 \\ -x-y-xy & 0 & 2xy+1+2x+2y \end{pmatrix}$ (1)

E2) $A(xy+x+y)=\begin{pmatrix} 1-(xy+x+y) & 0 & 2(xy+x+y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(xy+x+y) & 0 & 1+2(xy+x+y) \end{pmatrix}$ (2

E3) din (1)+(2) $\Rightarrow A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/134. II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, găsiți

$x\in\mathbb{R}$ dacă $A(x)A(x)A(x)=A(7)$ știind

că $A(x)\cdot A(y)=A(xy+x+y)$

$E_1)$ $A(x)A(x)=A(x^2+x+x)=A(x^2+2x)$

$E_2)$ $A(x)A(x)A(x)=A(x^2+2x)A(x)=$

$=A((x^2+2x)x+(x^2+2x)+x)=$

$=A(x^3+2x^2+x^2+3x)=A(x^3+3x^2+3x)$

$E_3)$ Dar, $A(x)A(x)A(x)=A(7)$

$\Rightarrow x^3+3x^2+3x=7 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x-7=0$

$E_4)$ $D_{-7}=\{\pm1,\pm7\}\Rightarrow$ Horner

	x^3	x^2	x	x^0
	1	3	3	-7
1	1	4	7	$\boxed{0}$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+4x+7)=0\Rightarrow$ $x-1=0\Rightarrow x=1$ sau $x^2+4x+7=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-28}}{2}$

$\Rightarrow \Delta<0\Rightarrow x_{1,2}\notin\mathbb{R}$

$E_5)$ $S_f: x=1$

Prof. Ovidiu Badescu

V135

Fie $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, arătați că $f(0) = m$ V 2a)

$E_1)$ $f(0) = 0 + 2 \cdot 0 + 0 + m$

$\Rightarrow f(0) = m$

Prof. Ovidiu Bădescu

V134

Fie $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, pentru $m=1$ II 26)

arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$

$E_1)$ $m=1 \Rightarrow f = X^3 + 2X^2 + X + 1$

$E_2)$ ec. atașată este $x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$

$E_3)$ x_1 rad $\Rightarrow x_1^3 + 2x_1^2 + x_1 + 1 = 0$

x_2 rad $\Rightarrow x_2^3 + 2x_2^2 + x_2 + 1 = 0$

x_3 rad $\Rightarrow x_3^3 + 2x_3^2 + x_3 + 1 = 0$

$+ \quad 4: (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0$

$E_4)$ Din VIETE, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

$E_5)$ Dar, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

Cum $S_1 = -\frac{b}{a} = -2$ și $S_2 = \frac{c}{a} = 1$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$

$E_6)$ înlocuim în $E_3) \Rightarrow$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 2 \cdot 2 + (-2) + 3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -5}$ (1)

$E_7)$ Din VIETE $\Rightarrow x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{1} = -1$

$\Rightarrow \boxed{5x_1x_2x_3 = -5}$ (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ egalitatea cerută

Prof. Ovidiu Rădescu

V135

Fie $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, găsiți nr. $\overline{II}$ 2c)
prim m dacă f are o rădăcină întreagă.

E_1) Posibilele răd. întregi sunt printre divizorii termenului liber

E_2) Cum m nr. prim $\Rightarrow D_m = \{\pm 1; \pm m\}$

E_3) $x_1 = 1$ răd $\Rightarrow 1 + 2 + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -4$ care NU e prim, K.O.

$x_2 = -1$ răd $\Rightarrow -1 + 2 - 1 + m = 0 \Rightarrow m = -2$ care NU e prim, K.O.

$x_3 = m$ răd $\Rightarrow m^3 + 2m^2 + m + m = 0 \Rightarrow$

$m^3 + 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(m^2 + 2m + 2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \text{ nu e prim} \\ \text{sau} \\ m^2 + 2m + 2 = 0 \end{cases}$ K.O.

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow m_{1,2} \notin \mathbb{R}$

$x_4 = -m$ răd $\Rightarrow -m^3 + 2m^2 - m + m = 0$

$\Rightarrow m^2(-m + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \text{ nu e prim} \\ \text{sau} \\ m = 2 \text{ e prim} \end{cases}$

$\Rightarrow m = 2$ valoarea cerută

Prof. Ovidiu Bădescu

V135
III 1a)

Fie $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, arătați că

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ex) $f'(x)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=$

$$=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V135

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, determinați ec. as. orizontale la ∞ ale G_f

---

E1) ec. asimpt oriz la ∞ a G_f este $y=l$ unde $l=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\in\mathbb{R}$

E2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+1}) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow y=0$ ec. asimpt oriz y la ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

V 135

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, arătați III 1c)
că derivata lui f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$

E_1) Rt a arăta că derivata lui f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$, calculăm $f''(x)$

E_2) $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

E_3) $f''(x)=0-\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{(\sqrt{x^2+1})^2}=$

$=-\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$

$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (f')'<0\Rightarrow f'\searrow$ pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\ln x$, V134

arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$ II 29)

$E_1)$ $\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=$

$=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, calculați aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$ V134 III 26)

$E_1)$ $\mathcal{A}(G_f)=\int_1^e |f(x)|dx=\int_1^e |\ln x|dx$

$E_2)$ deoarece $1\le x\le e$ / $\ln(\dots)$

$\Rightarrow \ln 1\le \ln x\le \ln e$

$\Rightarrow 0\le \ln x\le 1 \Rightarrow \ln x\ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\ln x|=\ln x$

$E_3)$ $\mathcal{A}(G_f)=\int_1^e \ln x\,dx$

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

$g'(x)=1 \Rightarrow g(x)=x$

$\mathcal{A}=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx=$

$=e\ln e-1\ln 1-x\Big|_1^e=$

$=e-0-(e-1)=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V135

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$, determinați $n\in\mathbb{N}^*$ dacă $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$ III e c)

E1) $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\int_1^e \frac{1}{x}(\ln x)^n dx=$

$$=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx$$

E2) not $t=\ln x \,/\,()'\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

$x=1\Rightarrow t=\ln 1\Rightarrow t=0$

$x=e\Rightarrow t=\ln e\Rightarrow t=1$

E3) $I=\int_0^1 t^n dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-0$

E4) Deci, $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}\Rightarrow n+1=2015$$

$$\Rightarrow n=2014$$

Prof Ovidiu Badescu