Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $N(4,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\left(\sin x+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos x+\cos(2\pi-x)\right)^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y.

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \dfrac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}\,dx=\dfrac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

Calculați partea reală pentru

$$z = \frac{3+2i}{2-3i}$$

E1) $z = \dfrac{\frac{2+3i}{3+2i}}{2-3i} = \dfrac{(2+3i)(3+2i)}{(2+3i)(2-3i)} =$

$$= \frac{6+4i+9i+6i^2}{2^2-(3i)^2} =$$

$$= \frac{6+13i-6}{4+9} = \frac{13i}{13} = i$$

E2) $z = i \Rightarrow z = 0+i \Rightarrow$ partea reală este 0

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți a dacă G_f este tangent la Ox unde $f(x)=x^2+x-a$

E1) G_f tangent la $Ox \Rightarrow G_f$ intersectează Ox în exact 1 punct $\Rightarrow \Delta = 0$

E2) $\Delta = 0 \Rightarrow 1-4\cdot 1\cdot(-a)=0$

$1+4a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$2^{2x}+3\cdot 4^{x}-16=0$$

E1) $2^{2x}+3\cdot 2^{2x}-16=0$

E2) not $t=2^{2x} \Rightarrow t+3t-16=0$

$4t-16=0 \Rightarrow t=4$

E3) $2^{2x}=4 \Rightarrow 2^{2x}=2^{2}$ $\Rightarrow 2x=2$

baza este $2\neq 1$ $\Rightarrow \boxed{x=1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând una din submulțimile cu 2 elemente din $A=\{1;2;3;4;5;6;7\}$, aceasta să aibă un singur element par

---

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

$E_2)$ <u>nr. cazuri posibile</u>: toate submulțimile cu 2 elemente din $A \Rightarrow C_7^2=\dfrac{7!}{2!(7-2)!}=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=$

$=\dfrac{5!\cdot 6\cdot 7}{2!\cdot 5!}=\dfrac{42}{2}=21$

$E_3)$ <u>nr. de cazuri favorabile</u>: nr. de submulțimi $\{a;b\}$ cu un singur element par

a par $\Rightarrow a\in\{2;4;6\}\rightarrow a\rightarrow$ 3 variante

b impar $\rightarrow b\in\{1;3;5;7\}\rightarrow b\rightarrow$ 4 variante independente

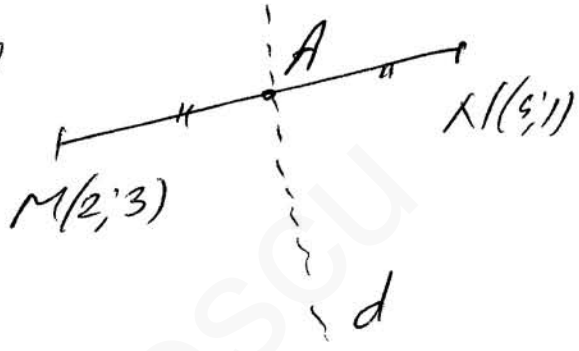
$3\cdot 4=12$ submulțimi.

$E_4)$ $P=\dfrac{12^{(3}}{21}=\dfrac{4}{7}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $M(2;3)$, $N(4;1)$, găsiți ec. mediatoarei lui MN

E_1) d mediat lui $MN \Rightarrow$
$d \perp MN$ și d trece prin mijl lui MN



E_2) Fie A mijl MN

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_M + x_N}{2} \Rightarrow x_A = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_A = \frac{y_M + y_N}{2} \Rightarrow y_A = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(3;2)}$$

E_3) $d \perp MN \Rightarrow m_d \cdot m_{MN} = -1$

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1-3}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$m_d \cdot m_{MN} = -1$ și $m_{MN} = -1 \Rightarrow \boxed{m_d = 1}$

E_4) Știm $A(3;2)$, $m_d = 1$

$\Rightarrow$ ec d: $y - y_A = m_d(x - x_A)$

$\Rightarrow y - 2 = 1(x-3)$

$y - 2 = x - 3 \Rightarrow \boxed{x - y - 1 = 0}$

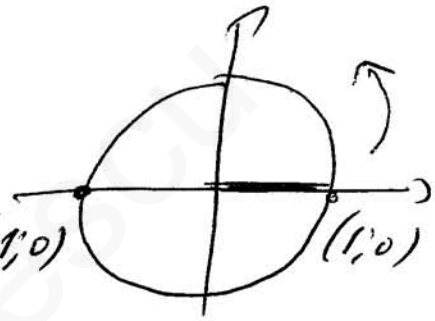
Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că

$$(\sin x + \sin(\pi - x))^2 + (\cos x + \cos(2\pi - x))^2 = 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

$E_1)$ $\sin(\pi - x) = \sin\pi\cos x - \cos\pi \sin x$

Din cerc $\Rightarrow \sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$



$\Rightarrow \sin(\pi - x) = 0 \cdot \cos x - (-1)\sin x$

$\Rightarrow \boxed{\sin(\pi - x) = \sin x}$

$E_2)$ $\cos(2\pi - x) = \cos 2\pi \cos x + \sin 2\pi \sin x$

Din cerc, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$

$\Rightarrow \cos(2\pi - x) = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x = \cos x$

$E_3)$ $(\sin x + \sin(\pi - x))^2 + (\cos x + \cos(2\pi - x))^2 =$

$= (\sin x + \sin x)^2 + (\cos x + \cos x)^2 =$

$= (2\sin x)^2 + (2\cos x)^2 =$

$= 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) =$

$= 4 \cdot 1 = 4$

Prof. Ovidiu Badescu

V133
II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$

$E_1)$ $A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $2A(0)=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
II 16)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, rezolvați în numere reale ecuația $\det(A(x)+I_3)=0$

$E_1)$ $A(x)+I_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(x)+I_3)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 1+0+x-0-0-0=0$

$\Leftrightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, arătați că

$$\det(aI_3 - bA(-1) + cA(-1)A(-1)) \geq 0,$$

$\forall a,b,c$ reale pozitive

$E_1)$ $aI_3 - bA(-1) + cA(-1)A(-1) =$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$E_2)$ $\det(aI_3 - bA(-1) + cA(-1)A(-1)) = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} \overset{C_3+C_1+C_2 \to C_1}{=}$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & c & b \\ a+b+c & a & c \\ a+b+c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$E_3)$ Deci, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ac) =$

$$= \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$E_4)$ a,b,c pozitive $\Rightarrow (a+b+c)\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y = xy-5x-5y+30$, arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$ V153 II 2a)

$E_1)$ Calculăm $(x-5)(y-5)+5=$

$=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30$

$E_2) \Rightarrow (x-5)(y-5)+5=x*y$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
VI 26)

Pe $\mathbb{Z}$ definim $x*y = xy - 5x - 5y + 30$,

Găsiți elementele simetrizabile în raport cu $*$

E_1) $*$ <u>comutativă</u>; $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ avem: $x*y = y*x$ evident

E_2) $*$ <u>are el neutru</u>; $\exists e \in \mathbb{Z}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{Z}$ să avem

$$x*e = e*x = x$$

$$x*e = x \Rightarrow xe - 5x - 5e + 30 = x$$

$$\Rightarrow e(x-5) = 6(x-5), \forall x \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow e = 6$. Deoarece $*$ comut $\Rightarrow x*e = e*x$

$\Rightarrow e = 6$ este el neutru

E_3) x e simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{Z}$ a.î.

$$x*x' = x'*x = e$$

Din $x*x' = e \Rightarrow xx' - 5x - 5x' + 30 = 6$

$$\Rightarrow x'(x-5) = 5x - 24$$

Dacă $x = 5 \Rightarrow x' \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ fals

Dacă $x \neq 5 \Rightarrow x' = \frac{5x-24}{x-5}$

Dar, x și $x' \in \mathbb{Z}$ iar din $x' \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{5x-25+1}{x-5} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{5(x-5)+1}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 + \frac{1}{x-5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{x-5} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-5 \in D_1 \Rightarrow x-5 \in \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{6; 4\}$$

$\Rightarrow$ singurele elemente simetrizabile sunt $\{4; 6\}$

Prof. Ovidiu Badescu

V133
II 20)

Fie $x*y = xy - 5x - 5y + 30$, calculați

$d_1 * d_2 * \dots * d_8$ unde $d_1, d_2 \dots, d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015

$E_1)$ $x*y = x(y-5) - 5(y-5) + 5$

$\Rightarrow x*y = (x-5)(y-5) + 5$

$E_2)$ Obs. că $x*5 = (x-5)\cdot 0 + 5 = 5$ și că

$5*x = 0\cdot(x-5) + 5 = 5$

$E_3)$ Deoarece 5 este un divizor al lui 2015

$\Rightarrow d_1 * d_2 * \dots * d_8 = \underbrace{d_1 * \dots}_{x} * 5 * \underbrace{\dots * d_8}_{y}$

$= x*5*y = 5*y = 5$

Prof. Ovidiu Badescu

V133
III 1a)

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=(x-\ln(x+1))'=1-\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'=$

$=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
II 15)

Fie $f(x) = x - \ln(x+1)$, calculați

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - f(x) - \ln 2}{x-1}$$

E1) $$l = \lim_{x \to 1} \frac{x - (x - \ln(x+1)) - \ln 2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' - 0}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
III 1c)

Fie $f(x)=x-\ln(x+1)$, arătați că

$\ln(x+1)\leq x,\ \forall x\in(-1,\infty)$

$E_1)$ $\ln(x+1)\leq x \Leftrightarrow \ln(x+1)-x\leq 0$

$E_2)$ Fie $g:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln(x+1)-x$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)'-1=\frac{1}{x+1}-1=\frac{1-x-1}{x+1}$$

$$g'(x)=\frac{-x}{x+1}$$

$E_3)$ $g'(x)=0 \Rightarrow -x=0 \Rightarrow x=0$

$E_4)$

x	$(-1$		0	
g'	$\parallel$	$+$	0	$-$
g	$\parallel$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$g'(-\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}>0 \Rightarrow g'(x)>0$ pe $(-1;0)$

$g'(1)=\frac{-1}{2}<0 \Rightarrow g'(x)<0$ pe $(0;\infty)$

$g(0)=\ln(0+1)-0=\ln 1=0$

$E_5)$ din tabelul de variație $\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)\leq 0,\ \forall x\in(-1;\infty)$

$\Rightarrow \ln(x+1)-x\leq 0 \Rightarrow \ln(x+1)\leq x,\ \forall x\in(-1,\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133

Fie $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, calculați

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

E1) $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{0})=\frac{\ln 2}{2}$$

Prof. Ovidiu Badescu

V133
III 26)

Fie $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, arătați că:

$$\int_0^1 \frac{f(x)+x^2 f(x)}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{8}$$

$E_1)$ $I=\int_0^1 \frac{f(x)(1+x^2)}{x^4+1}dx=\int_0^1 \frac{\frac{x}{x^2+1}\cdot(1+x^2)}{x^4+1}dx=$

$$=\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}dx$$

$E_2)$ not $t=x^2 \mid (\,)' \Rightarrow dt=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2}$

$x=0 \Rightarrow t=0$ și $x=1 \Rightarrow t=1$

$E_3)$ $I=\int_0^1 \frac{\frac{dt}{2}}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} t\Big|_0^1=$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} 0)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{8}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V133
III 2 c)

Fie $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, calculați

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\int_1^x f(t)dt$$

E1) $$l=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}$$

E2) $$\lim_{x\to 1}\int_1^x f(t)dt=\int_1^1 f(t)dt=0$$

$$\Rightarrow l=\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\int_1^x f(t)dt\right)'}{(x-1)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Pădescu