Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați $(z-1)^2$.

5p **2.** Arătați că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+3=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x+4$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=12$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & a+1\\ 2 & a+2 & a+3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(a))$.

5p **b)** Determinați numărul natural n, știind că $2A(n^2)-A(n)=A(6)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că polinomul f este divizibil cu $X+1$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^2 f^2(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Arătați că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Fie $z=1+i$, calculați $(z-1)^2$

$\in$) $(z-1)^2=(1+i-1)^2=i^2=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$ unde x_1, x_2 sunt rad ale $x^2-5x+3=0$

E_1) Pentru $x^2-5x+3=0$, din VIÈTE

$$\Rightarrow S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5$$

$$P=x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3$$

E_2) $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3\cdot 5-4\cdot 3=15-12=3$

$\Rightarrow$ E. e. d.

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

E_1) not $t = 2^x > 0 \Rightarrow 4^x = t^2$

$\Rightarrow$ ec. $t^2 - 3t + 2 = 0$

E_2) $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

E_3) $t_1 = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

$t_2 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$x \in \{0; 1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să fie $\vdots$ cu 13

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: nr. de 2 cifre $\overline{ab}$ unde

$a \to 9$ v

$b \to 10$ v

independ

$9 \cdot 10 = 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: nr. de 2 cifre $\vdots 13$

Acestea sunt $\{13; 26; 39; 52; 65; 78; 91\}$

$\Rightarrow$ 7 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{7}{90}$

Prof. Ovidiu Bădescu

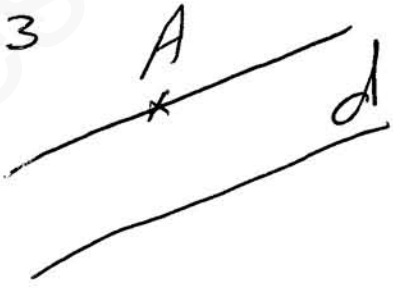
Fie $d: y = 3x + 4$ și $A(1;0)$. Găsiți ec. paralelei prin A la d

---

E_1) Fie d_1 dreapta ce trece prin A și paralelă cu d $\Rightarrow m_{d_1} = m_d$

E_2) $d: y = 3x + 4 \Rightarrow 3x - y + 4 = 0$

$$m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-1} = 3$$



$\Rightarrow m_{d_1} = 3$

E_3) ec. d_1: $y - y_A = m_{d_1}(x - x_A)$

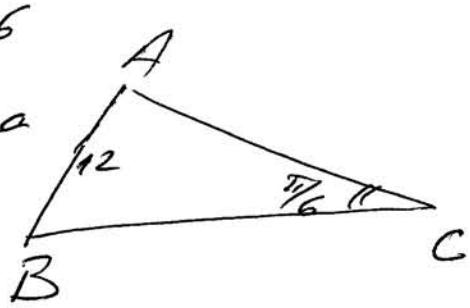
$\Rightarrow y - 0 = 3(x - 1)$

$\Rightarrow y = 3x - 3 \Rightarrow \boxed{3x - y - 3 = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați raza cercului circumscris ΔABC dacă $AB=12$ și $C=\frac{\pi}{6}$

$E_1)$ Se știe un unghi și latura opusă, folosim T. sinusurilor



$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R \text{ și alegem}$$

$$\frac{AB}{\sin C}=2R \Rightarrow \frac{12}{\sin 30^\circ}=2R$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{2}}=2R \Rightarrow 2R=24 \Rightarrow R=12$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$

Calculați $\det(A(a))$

$E_1)\ \det(A(a))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{matrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a & a+1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a & a+1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det(A(a))=0$ pt că are 2 linii identice

Obs.: și dacă l-am fi calculat efectiv cu regula Δ am fi obținut 0 și am fi luat punctaj maxim

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$

Găsiți $n\in\mathbb{N}$ dacă

$2A(n^2)-A(n)=A(6)$

$E_1)$ $2A(n^2)-A(n)=A(6)\Rightarrow$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n^2 & n^2+1 \\ 2 & n^2+2 & n^2+3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n & n+1 \\ 2 & n+2 & n+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2n^2 & 2n^2+2 \\ 4 & 2n^2+4 & 2n^2+6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n & n+1 \\ 2 & n+2 & n+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2-n & 2n^2-n+1 \\ 2 & 2n^2-n+2 & 2n^2-n+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$E_2)\Rightarrow\begin{cases} 2n^2-n=6 \\ 2n^2-n+1=7 \\ 2n^2-n+2=8 \\ 2n^2-n+3=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2n^2-n-6=0 \\ 2n^2-n-6=0 \\ 2n^2-n-6=0 \\ 2n^2-n-6=0 \end{cases}$

$E_3)$ $2n^2-n-6=0\Rightarrow n_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{1\pm 7}{4}\begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -\frac{3}{2} \end{matrix}$

Dar, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$

Arătați că $\exists$ o infinitate de matrici $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ cu $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_1)$ $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2015 & 2016 \\ 2 & 2017 & 2018 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ 0+2015y+2016z \\ 2x+2017y+2018z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2015y+2016z=0 \\ 2x+2017y+2018z=0 \end{cases}$

$E_3)$ Este un sistem liniar omogen cu

$\det S=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2015 & 2016 \\ 2 & 2017 & 2018 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2015 & 2016 \\ 2 & 2015 & 2016 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2015 & 2016 \\ 2015 & 2016 \end{vmatrix} \overset{L_1=L_2}{=\!=} 0$

$E_4)$ TEORIE: Un sistem liniar omogen cu $\det S=0$ are o infinitate de soluții $\Rightarrow$ $\exists$ o infinitate de matrici X cu $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX - 3$. Dacă $m = 2$, arătați că $f(1) = 0$

E1) pentru $m = 2 \Rightarrow f = X^3 + 2X - 3$

E2) $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1 - 3 \Rightarrow f(1) = 1 + 2 - 3$

$\Rightarrow f(1) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX - 3$, găsiți m dacă $f \vdots (X+1)$

E1) $f \vdots (X-\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

E2) în cazul nostru, $f \vdots (X+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-1) = 0$

E3) $f(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 + m \cdot (-1) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -1 - m - 3 = 0 \Leftrightarrow -4 - m = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{m = -4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX - 3$, arătați că $\forall m$ real strict pozitiv, polinomul f are 2 rădăcini de module egale

---

$E_1)$ $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ toți coef lui f sunt reali

$E_2)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = (-0)^2 - 2 \cdot m = -2m$

$E_3)$ $m \in \mathbb{R}$, $m > 0 \Rightarrow -2m < 0 \Rightarrow$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 0 \Rightarrow$ NU TOATE răd lui f sunt reale

$E_4)$ f are gr impar, $f \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow f$ are cel puțin o răd reală $\overset{E_3}{\Rightarrow}$ f are cel puțin o răd complexă nereală

$E_5)$ $f \in \mathbb{R}[X]$
$\alpha = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ răd $\Big\} \Rightarrow \underset{\text{răd}}{\bar{\alpha} = a - bi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$E_6)$ $\alpha = a + bi$ e răd cu $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\bar{\alpha} = a - bi$ e răd $\Rightarrow |\bar{\alpha}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\Rightarrow f$ are 2 rădăcini de module egale

Obs.: mergea cu șirul lui Rolle, $f'(x) = 3x^2 + m$, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = -m$ și cum $m > 0 \Rightarrow f'$ nu are răd

x	$-\infty$				∞
f'	$+$	$+$	$+$	$+$	
f	$-\infty$				∞

$\Rightarrow$ șirul Rolle $(-;+)$ $\Rightarrow f$ are exact o răd reală.

Presupun că $f = 3 \Rightarrow f$ are 2 răd $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $\alpha_1 = a + bi$, $\alpha_2 = a - bi$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$, calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=\left(\frac{x+1}{e^x-x}\right)'=\frac{(x+1)'(e^x-x)-(x+1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}$

$f'(x)=\frac{1(e^x-x)-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$

$f'(x)=\frac{e^x-x\cancel{+xe^x+x-e^x+1}}{(e^x-x)^2}=\frac{-xe^x+1}{(e^x-x)^2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$, găsiți ec. tangentei la G_f în $x_0=0$

E_1) Ec. tg în $x_0=0$ este

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

E_2) $f(0)=\frac{0+1}{e^0-0}=\frac{1}{1}=1$

E_3) Rămâne a calcula $f'(0)$, calculăm

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{e^x-x}\right)'=\frac{1(e^x-x)-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$$

$$=\frac{e^x-x-xe^x+x-e^x+1}{(e^x-x)^2}=\frac{1-xe^x}{(e^x-x)^2}$$

E_4) $f'(0)=\frac{1}{1}=1$

$\Rightarrow$ ec. tg.: $y-1=1(x-0)$

$\Rightarrow y-1=x \Rightarrow x-y+1=0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$, calculați

$\lim_{x\to\infty} f(-x)$

E1) $f(-x)=\frac{-x+1}{e^{-x}+x}$

E2) $l=\lim_{x\to\infty} f(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{e^{-x}+x}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x+1)'}{(e^{-x}+x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{e^{-x}\cdot(-1)+1}=$

$\frac{-1}{0+1}=-1$

Obs.: limita se putea calcula și fără l'H astfel:

$l=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{e^{-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(-1+\frac{1}{x})}{x(\frac{e^{-x}}{x}+1)}$

$\frac{-1+0}{0+1}=-1$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

Calculați $\int_0^2 f^2(x)\,dx$

E1) $I = \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2\cdot 2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\Big|_0^2$

E2) $I = \frac{1}{4}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

Arătați că o primitivă pentru f este crescătoare pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ e continuă $\Rightarrow f$ admite primitive, fie $F(x)$ o primitivă a sa $\Rightarrow F$ derivabilă și $F'(x)=f(x)$

$E_2)$ $F'(x)=f(x)\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0\Rightarrow F'(x)>0$

$\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow F$ crescătoare pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu