Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+3i$. Calculați z^2.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9\left(x^2+5\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $\det(A(a))=1$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Calculați $1\circ 2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

V132
I/1

Ако $z = 2+3i$, израчунај z^2

Е1) $z^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i + 3i^2 =$

$= 4 + 12i - 3 = 1 + 12i$

Se cer coord. pct de $\cap$ cu Ox pt G_f, $f(x) = x^2 - 6x + 9$ V/132 I/2

E_1) $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2 \cdot 1} = 3$

E_3) $A(3; 0)$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

V/132
I/3

$$\log_9(x^2+5)=1$$

E_1) Cond.: $x^2+5>0$

E_2) Dacă nu rezolvăm condițiile, atunci soluția posibilă se verifică în ec. inițială și nu suntem depunctați

E_3) $\log_9(x^2+5)=1 \Leftrightarrow x^2+5=9$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ soluții posibile

E_4) le verificăm în ec. $\log_9(x^2+5)=1$

$x=2 \rightarrow \log_9(4+5)=1 \Leftrightarrow \log_9 9=1$ adev.

$x=-2 \rightarrow \log_9(4+5)=1 \Leftrightarrow \log_9 9=1$ adev.

E_5) $S_8: x \in \{-2;2\}$

Grăiești probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta $\vdots 13$ V132 I/4

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : $\overline{ab}$

$a \to 9\text{v}$

$b \to 10\text{v}$

independ

$9 \cdot 10 = 90$ posibile

$E_3)$ nr. caz favorabile: nr. $\overline{ab} \vdots 13$

$\to \{13; 26; 39; 42; 65; 78; 91\}$

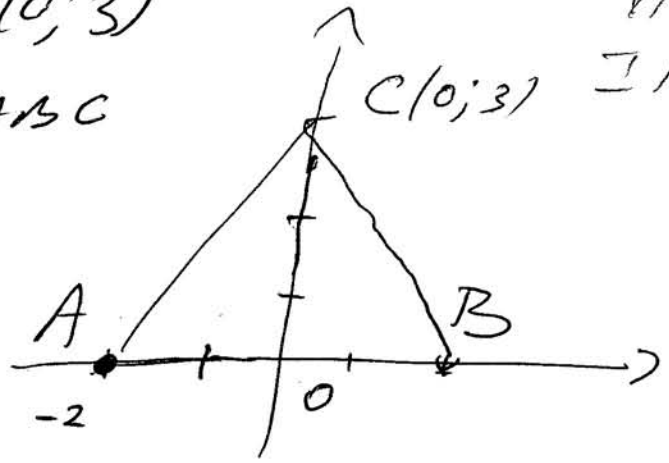
$\Rightarrow 7$ favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{7}{90}$

V132
I/5

$A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(0;3)$

Se cere aria ΔABC



$E_1)\ \mathcal{A}_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$

$E_2)\ b = AB = 4$

$h = OC = 3$

$E_3)\ \mathcal{A} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

---

metodă generală:

$E_1)\ AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (0-0)^2} = 4 = c$

$E_2)\ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13} = b$

$E_3)\ BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13} = a$

$E_4)\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+\sqrt{13}+\sqrt{13}}{2}$

$\Rightarrow p = 2+\sqrt{13}$

$E_5)\ S = \sqrt{(2+\sqrt{13})(2+\sqrt{13}-\sqrt{13})(2+\sqrt{13}-\sqrt{13})(2+\sqrt{13}-4)}$

$S = \sqrt{(2+\sqrt{13})(\sqrt{13}-2) \cdot 4} = \sqrt{(2\sqrt{13}-4+13-2\sqrt{13}) \cdot 4}$

$S = \sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$

V132
I/6

Fie $E(x) = \cos x + \sin \frac{x}{2}$, se cere $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$E_1)$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}$

$E_2)$ $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$

$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$E_3)$ $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, calculați

$\det(A(1))$

$E_1)\ A(1)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2)\ \det(A(1))=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6-0=6$

V13:
I 19)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$

Găsiți $a=?$ dacă $\det(A(a))=1$

$E_1)$ $\det(A(a))=\begin{vmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{vmatrix}=2(2a+1)-(1-a)=$

$=4a+2-1+a=5a+1$

$E_2)$ $\det(A(a))=0 \Rightarrow 5a+1=0 \Rightarrow 5a=-1$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{5}$

V/132

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$, găsiți inversa (dacă $\exists$) lui $A(0)$

$E_1)$ $A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det A(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_3)$ $A^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_4)$ $a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot|2|=2$

$a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot|1|=-1$

$a_{21}^*=(-1)^{2+1}\cdot|1|=-1$

$a_{22}^*=(-1)^{2+2}\cdot|1|=1$

$E_5)$ $A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_6)$ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^*=\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Fie $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$

Calculați $1 \circ 2$

E₁) $1 \circ 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6$

$1 \circ 2 = 4 - 3 - 6 + 6$

$1 \circ 2 = 1$

Fie $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$, arătați că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

E_1) Pornim cu $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow x \circ y = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2}$$

$$x \circ y = 2xy - 3x - 3y + \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$x \circ y = 2xy - 3x - 3y + \frac{12}{2}$$

$$x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$$

Fie $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $x \circ x = 2$

E_1) $x \circ x = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3x + 6 = 2$

E_2) $2x^2 - 6x + 4 = 0 \mid : 2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

E_3) $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \{1; 2\}$

Fie $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-2}$

Calculați $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

E1) $l = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{-x}}{x-2} = \dfrac{e^{-1}}{1-2} = -\dfrac{1}{e}$

Fie $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$, arătați că

$$f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$$

$$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x-2}\right)'=\frac{(e^{-x})'(x-2)-e^{-x}(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{e^{-x}\cdot(-1)(x-2)-e^{-x}\cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$E_2)\ f'(x)=\frac{e^{-x}(-x+2-1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(1-x)}{(x-2)^2}$$

V132

Fie $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$, arătați că

$$f(x)\leq -\frac{1}{e},\ \forall x\in(-\infty;2)$$

E1) Facem tabel de variație

E2) $f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x-2}\right)'=\frac{e^{-x}\cdot(-1)(x-2)-e^{-x}\cdot 1}{(x-2)^2}=$

$$=\frac{e^{-x}(-x+2-1)}{(x-2)^2}=\frac{e^{-x}(1-x)}{(x-2)^2}$$

E3) $f'(x)=0\Rightarrow$ $e^{-x}=0$ fals sau $1-x=0\Rightarrow x=1$

E4)

x		1		2
f'	$+++++$	0	$--$	
f	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm câte o valoare pe fiecare interval

$f'(0)=\frac{e^0\cdot 1}{(-2)^2}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(-\infty;1)\Rightarrow$

$f\nearrow$ pe $(-\infty;1)$

$f'(3/2)=\frac{e^{-3/2}\cdot(-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})^2}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow$

E5) $f(1)=\frac{e^{-1}}{1-2}=-\frac{1}{e}$ rezultă din tabel $f(x)\leq -\frac{1}{e}$

Fie $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$, arătați că

$$\int_1^2 (x+1)f(x)dx = 2\ln 2 - 1$$

$E_1)$ $I=\int_1^2 (x+1)\cdot \frac{\ln x}{x+1}dx=\int_1^2 \ln x\,dx$

$E_2)$ $f=\ln x \Rightarrow f'=\frac{1}{x}$

$g'=1 \Rightarrow g=\int 1dx=x$

$I= x\cdot \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$E_3)$ $I=2\ln 2-1\cdot \ln 1 - x\Big|_1^2$

$I=2\ln 2-(2-1)$

$I=2\ln 2-1$

Fie $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$, arătați că

$$\int_1^e (f(x)+(x+1)f'(x))\,dx=1$$

E_1) Observăm că

$$f(x)+(x+1)f'(x)=\left((x+1)f(x)\right)'$$

E_2) $I=\int_1^e \left((x+1)f(x)\right)'dx=$

$$=(x+1)f(x)\Big|_1^e=(e+1)f(e)-(1+1)f(1)$$

E_3) $I=(e+1)\cdot\frac{\ln e}{e+1}-2\cdot\frac{\ln 1}{2}$

$$I=\ln e-0=1$$

Fie $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$, găsiți volumul corpului obținut prin rotația G_g în jurul lui Ox unde $g:[2;3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$

E1) $V=\pi\int_a^b g^2(x)\,dx$

E2) $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}=\frac{\ln x}{\frac{\ln x}{x+1}}=\ln x\cdot\frac{x+1}{\ln x}=x+1$

E3) $V=\pi\int_2^3 (x+1)^2\,dx=$

$=\pi\int_2^3 (x^2+2x+1)\,dx=$

$=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_2^3+2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+x\Big|_2^3\right)=$

$=\pi\left(\frac{27-8}{3}+(9-4)+(3-2)\right)=$

$=\pi\left(\frac{19}{3}+2\right)=\frac{25\pi}{3}$