Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x pentru care numerele 2, $x+2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuși.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det B$.

5p **b)** Arătați că $AB=BA$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4(x+y-5)$.

5p **a)** Calculați $4*5$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2014$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\dfrac{3e^4+1}{16}$.

5p **c)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă numerele $2, x+2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progr. aritm.

$E_1)$ a, b, c progr. aritm. $\Leftrightarrow a+c=2b$

$E_2)$ $2+10=2(x+2)$

$\Rightarrow 12 = 2x+4 \Rightarrow 2x = 8$

$\Rightarrow \boxed{x=4}$

Determinați valoarea minimă pt

$f(x) = x^2 - 2x - 10$

E1) Dacă $f(x) = ax^2 + bx + c$, atunci f are minim dacă $a > 0$ și minimul este $-\frac{\Delta}{4a}$

E2) în cazul nostru, $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ are minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$

E3) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) =$

$= 4 + 40 = 44$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{44}{4} = -11$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_2(x^2-2x)=3$$

E1) Cond.: $x^2-2x>0$

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

x		0		2	
x^2-2x	$+$	0	$-$	0	$+$

Rt ca $x^2-2x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)=I_c$

E2) $\log_b x=N \Leftrightarrow x=b^N$, în cazul nostru $\log_2(x^2-2x)=3 \Leftrightarrow$

$$x^2-2x=2^3 \Leftrightarrow x^2-2x=8 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x-8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm6}{2} \begin{cases} 4\in I_c \\ -2\in I_c \end{cases}$$

E3) $S_f: x\in\{-2,4\}$

Obs.: eu aș fi punctat maxim și dacă nu se găsea I_c, dar soluțiile obținute se verificau în ec. inițială

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. natural de 2 cifre, acesta să fie par

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. de două cifre $\overline{ab}$, $\left.\begin{matrix} a \to 9 \text{ v} \\ b \to 10 \text{ v} \\ \text{ind} \end{matrix}\right\} \to$ 90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. pare de două cifre: $\overline{ab}$, $\left.\begin{matrix} a \to 9 \text{ v} \\ b \to 5 \text{ v} \\ \text{ind} \end{matrix}\right\} \to 9 \cdot 5 = 45$ numere

$E_4)$ $P = \dfrac{45}{90} = \dfrac{1}{2}$

$a=?$ dacă $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuși

---

$E_1)$ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ opuși $\Leftrightarrow \vec{u}=-\vec{v}$

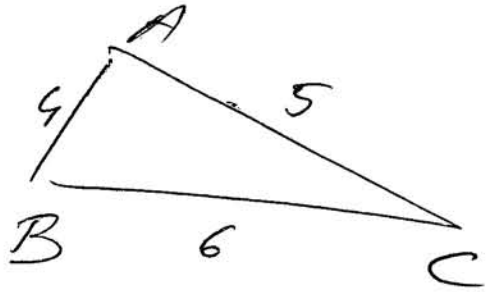
$E_2) \Leftrightarrow (a-2)\vec{i}-2\vec{j}=-(3\vec{i}+2\vec{j})$

$\Leftrightarrow (a-2)\vec{i}-2\vec{j}=-3\vec{i}-2\vec{j}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-3 \Rightarrow \boxed{a=-1} \\ -2=-2 \quad \text{Adev} \end{cases}$

$E_3)$ S_f: $\boxed{a=-1}$

Calculați $\cos A = ?$ dacă în $\triangle ABC$ avem: $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$



$E_1)$ T. cos $\Rightarrow$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$E_2)$ $$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos A$$

$$36 = 41 - 40 \cos A$$

$$\Rightarrow 40 \cos A = 41 - 36$$

$$40 \cos A = 5$$

$$\cos A = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Fie $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculați $\det B$

E1) $\det B=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-1-0-0 =$

$= -1$

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Arătați că $AB=BA$

E1) $AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E2) $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB=BA$

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Găsiți $x\in\mathbb{R}$ dacă $\det(B+xA)=1$

E1) $B+xA=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E2) $\det(B+xA)=1\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow 0+x+x-x^3-0-0=1$

$\Rightarrow 2x-x^3=1$

$\Rightarrow -x^3+2x-1=0\ /\cdot(-1)$

$x^3-2x+1=0$

E3) Horner

	x^3	x^2	x	x^0
	1	0	−2	1
1	1	1	−1	0

$\Rightarrow(x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Rightarrow$ $x-1=0\Rightarrow x=1$ sau $x^2+x-1=0\Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

Fie $x * y = xy - 4(x+y-5)$, calculați

$4 * 5 = ?$

E1) $4 * 5 = 4 \cdot 5 - 4(4+8-5)$

$4 * 5 = 20 - 4 \cdot 4$

$4 * 5 = 20 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 * 5 = 4$

Fie $x * y = xy - 4(x+y-5)$, arătați că

$$x * y = (x-4)(y-4)+4$$

$E_1)$ $x * y = xy - 4(x+y-5) = xy - 4x - 4y + 20$ (1)

$E_2)$ $(x-4)(y-4)+4 = xy - 4x - 4y + 16 + 4 =$

$= xy - 4x - 4y + 20$ (2)

$E_3)$ Din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Fie $x * y = xy - 4(x+y-5)$, calculați

$$1 * 2 * 3 * \ldots * 2014$$

E_1) scriem forma restrânsă:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20 = x(y-4) - 4(y-4) + 4$$

$$= (y-4)(x-4) + 4 = (x-4)(y-4) + 4$$

E_2) Obs. că $x * 4 = (x-4)(4-4) + 4 = 0 + 4$

$$\Rightarrow x * 4 = 4$$

Obs. că $4 * y = (4-4)(y-4) + 4 = 0 + 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4 * y = 4$$

E_3) $1 * 2 * \ldots * 2014 =$

$$= (\underbrace{1 * 2 * 3}_{x}) * 4 * (\underbrace{5 * 6 * \ldots * 2014}_{y}) =$$

$$= x * 4 * y = (x * 4) * y = 4 * y = 4$$

Fie $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+3}$, calculați

$\lim_{x\to\infty} f(x)$

E1) $l = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2+3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} =$

$\frac{1-0}{1+0}$

$= 1$

Fie $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$, arătați că

$$f'(x)=\frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

$\in_1)$ $f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)'=\frac{(x^2-3)'(x^2+3)-(x^2-3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$

$$=\frac{2x(x^2+3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2}=\frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

Fie $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$, arătați că f este convexă pe $(-1;1)$

E_1) Vom arăta că $f''(x)\geq 0$ pe $(-1;1)$

E_2) $f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)'=\frac{2x(x^2+3)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$

$$=\frac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2}=\frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

Fie $f(x) = \ln x$, arătați că

$$\int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$E_1)$ $I = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx$

$E_2)$ not $t = f(x) \mid (\,)' \Rightarrow dt = f'(x)\,dx$

$E_3)$ $x = 1 \Rightarrow t = f(1) \Rightarrow t = \ln 1 \Rightarrow t = 0$

$x = e \Rightarrow t = f(e) \Rightarrow t = \ln e \Rightarrow t = 1$

$E_4)$ $I = \int_0^1 t \cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Fie $f(x) = \ln x$, arătați că

$$\int_1^e x^3 \cdot f(x)\,dx = \frac{3e^4+1}{16}$$

E1) $I = \int_1^e x^3 \cdot \ln x\,dx$

E2) $f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x}$

$g' = x^3 \Rightarrow g = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

E3) $I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx$

$I = \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1}{4} \ln 1 - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx$

$I = \frac{e^4}{4} \cdot 1 - 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_1^e$

$I = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16}(e^4 - 1)$

$I = \frac{4e^4 - e^4 + 1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}$