Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.

5p **2.** Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele.

5p **6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\dfrac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.

5p **a)** Calculați $2*4$.

5p **b)** Arătați că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\dfrac{1}{144}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$ știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Găsiți partea reală a $z = 3+2(1-i)$

$E_1)$ $z = 3+2(1-i) \Rightarrow z = 3+2-2i$

$\Rightarrow z = 5-2i$

$E_2)$ $\Rightarrow$ partea reală,

$\operatorname{Re} z = 5$

Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$ dacă x_1 și x_2 soluții ale $x^2 - 3x + 10 = 0$

$E_1)$ $x^2 - 3x + 10 = 0$, din VIETE $\Rightarrow$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

$E_2)$ $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = S + 2P = 3 + 2 \cdot 10 = 23$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2+x+1} = 1$$

E_1) Cond.: $x^2+x+1 \geq 0$

E_2) Rezolvăm iar soluția se verifică în ec. inițială

E_3) $\sqrt{x^2+x+1} = 1 \,/\,()^2 \Rightarrow x^2+x+1 = 1$

$\Rightarrow x^2+x = 0$

$\Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \text{sau} \\ x_2 = -1 \end{cases}$ sol posibile

E_4) $x_1 = 0$ o verificăm:

$\sqrt{0^2+0+1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ adev $\Rightarrow x_1 = 0$ soluție

$x_2 = -1$ o verificăm:

$\sqrt{(-1)^2-1+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-1+1} = 1$ adev

$\Rightarrow x_2 = -1$ soluție

E_5) S: $x \in \{-1; 0\}$

Găsiți câte numere naturale impare de 3 cifre se pot forma cu elementele din $\{1; 2; 3\}$

E_1) Cea mai simplă metodă, mai ales pentru M2 e să le enumerăm

E_2) Numerele sunt:

111; 113; 121; 123; 131; 133;
211; 213; 221; 223; 231; 233;
311; 313; 321; 323; 331; 333

$\Rightarrow$ 18 numere

Metoda II:

E_1) Numerele au forma $\overline{abc}$ cu c impar

a are 3 v
b are 3 v
c are 2 v
index

---

regula produselui $\Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

Găsiți a dacă dreptele $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele

---

$E_1)$ $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

$E_2)$ $m = -\frac{a}{b}$, aducem dreptele la forma $y=mx+n$ astfel:

$$y=(a-1)x+1 \Rightarrow (a-1)x - y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{a-1}{-1} = a-1$$

$$y = 2x-3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow m_2 = -\frac{2}{-1} = 2$$

$E_3)$ $m_1 = m_2 \Rightarrow a-1=2 \Rightarrow \boxed{a=3}$

Găsiți raza cercului circumscris ΔABC dacă $AB=3,\ AC=4,\ BC=5$

E_1) Folosim formula

$$R = \frac{abc}{4S}$$

E_2) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

E_3) $R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, calculați $\det(A(2))$

$E_1)$ $A(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$E_2)$ $\det A(2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, găsiți x dacă

$$A(x)\cdot A(-x)=I_2$$

$E_1)$ $A(x)\cdot A(-x)=I_2 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x^2+1 & x-x \\ -x+x & 1-x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2) \Rightarrow 1-x^2=1 \Rightarrow x^2=0$

$$\Rightarrow x=0$$

Fie $A(n)=\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & * \end{pmatrix}$, arătați că

$$\det(A(1)+A(2)+\dots+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$$

$E_1)$ $A(1)+A(2)+\dots+A(n)=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+2+\dots+n & \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} \\ \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} & 1+2+\dots+n \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$$

$E_2)$ $\det(A(1)+A(2)+\dots+A(n))=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}=$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-n^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\overset{4/}{-}n^2=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2-4n^2}{4}=\frac{n^2\left(n^2+2n+1-4\right)}{4}=$$

$$=\frac{n^2(n^2+2n-3)}{4}$$

$E_3)$ Dar, $(n-1)(n+3)=n^2+3n-n-3=$

$=n^2+2n-3 \Rightarrow$ S.e.d

Pe $\mathbb{R}$ avem: $x * y = 4(x+y-3) - xy$

Calculați $2 * 4$

E1) $2 * 4 = 4(2+4-3) - 2 \cdot 4 =$

$= 4 \cdot 3 - 8 = 12 - 8 = 4$

Fie $x * y = 4(x+y-3) - xy$, arătați că

$x * y = 4 - (x-4)(y-4)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

E,) $x * y = 4(x+y-3) - xy$, să cere

$x * y = 4 - (x-4)(y-4)$

Exponem cu $4 - (x-4)(y-4) =$

$= 4 - (xy - 4x - 4y + 16) =$

$= 4 - xy + 4x + 4y - 16 =$

$= -xy + 4x + 4y - 12 =$

$= -xy + 4(x+y-3) = x * y$

Fie $x*y = 4(x+y-3)-xy$, rezolvați în $\mathbb{R}$

$x*x*x = x$ dacă știm că

$x*y = 4-(x-4)(y-4)$ (1)

$E_1)$ $x*y = 4-(x-4)(y-4) \Rightarrow$

$x*x = 4-(x-4)(x-4) = 4-(x-4)^2$

$\Rightarrow x*x = 4-(x-4)^2$

$E_2)$ $x*x*x = (x*x)*x = \underbrace{(4-(x-4)^2)}_{x} * \underbrace{x}_{4} \overset{(1)}{=}$

$= 4-(4-(x-4)^2-4)(x-4) =$

$= 4-(-(x-4)^2)(x-4) = 4+(x-4)^3$

$E_3)$ ecuația $x*x*x = 4 \Leftrightarrow$

$4+(x-4)^3 = 4 \Leftrightarrow (x-4)^3 = 0$

$\Leftrightarrow x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$

Arătați că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$

$E_1)$ $l=\lim\limits_{x\to e}(x\ln x-x+1)\overset{e\ln e-e+1}{=\!=\!=}$

$=e\cdot 1-e+1=e-e+1=1$

Fie $f(x) = x \ln x - x + 1$, arătați că

$$f'(x) = \ln x, \quad \forall x \in (0; \infty)$$

$E_1)$ $f'(x) = (x \ln x - x + 1)' =$

$= x' \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1 + 0 =$

$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Fie $f(x) = x \ln x - x + 1$, arătați că

$f(x) \geq 0, \forall x \in (0; \infty)$

$E_1)$ $f'(x) = (x \ln x - x + 1)' =$

$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 + 0 =$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$E_2)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0$

$\Rightarrow x = 1$

$E_3)$

x	0		1
f'	‖	+	0
f	‖	↗	

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, dăm valori: $f'(\frac{1}{e}) = \ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} =$

$= -1 \ln e = -1 \cdot 1 = -1 < 0$

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$, arătați că

$$\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=2014$$

Eq) $I=\int_0^{2014}(x+3)(x+5)\cdot\frac{1}{x^2+8x+15}\,dx=$

$$=\int_0^{2014}(x^2+8x+15)\cdot\frac{1}{x^2+8x+15}\,dx=$$

$$=\int_0^{2014}1\,dx=x\Big|_0^{2014}=2014-0=$$

$$=2014$$

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$, arătați că

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=-\frac{1}{144}$$

E1) $I=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx$

not $t=f(x)\,|\,(\,)' \Rightarrow dt=f'(x)\,dx$

$x=-1 \Rightarrow t=f(-1) \Rightarrow t=\frac{1}{1-8+15}=\frac{1}{8}$

$x=1 \Rightarrow t=f(1) \Rightarrow t=\frac{1}{1+8+15}=\frac{1}{24}$

E2) $I=\int_{1/8}^{1/24} t\cdot dt=\frac{t^2}{2}\Big|_{1/8}^{1/24}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{24}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{576}-\frac{9}{64}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-8}{576}=-\frac{4}{576}=-\frac{1}{144}$

Obs.: Dacă se știa formula

$\int f^n\cdot f'=\frac{f^{n+1}}{n+1}+C$, problema era mult mai simplă deoarece

$I=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(f(1)^2-f(-1)^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{24}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)=\ldots=-\frac{1}{144}$

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$, determinați $a\in\mathbb{R}, a>0$ dacă aria dintre Gf, Ox și $x=0, x=a$ are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$

$\overline{E_1}$ $\mathcal{A}=\int_0^a |f(x)|dx=\int_0^a \left|\frac{1}{x^2+8x+15}\right|dx$

E_2 Dar, $a>0$ și $x\in[0;a] \Rightarrow \frac{1}{x^2+8x+15}>0$

$\Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^a \frac{1}{x^2+8x+15}dx$

E_3 Folosim forma canonică:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+8x+15=1\left(x+\frac{8}{2}\right)^2-\frac{64-60}{4}=$$

$$=(x+4)^2-1$$

E_4 $I=\int_0^a \frac{1}{(x+4)^2-1}dx$, not $t=x+4 \mid (\,)' \Rightarrow dt=dx$,

capetele: $x=0\Rightarrow t=4$ și $x=a\Rightarrow t=a+4$

$$I=\int_4^{a+4}\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_4^{a+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a+3}{a+5}-\ln\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{a+3}{a+5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}$$

E_5 Dar, $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9} \Rightarrow \frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{10}{9} \Rightarrow 45(a+3)=30(a+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$