Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt{x^2+3}=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(4,0)$ și $C(2,0)$. Determinați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$ pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & a^2 & b^2\end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Calculați $D(1,0)$.

5p **b)** Arătați că $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$ pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că numărul $D(m,n)$ este par pentru orice numere întregi m și n.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$.

5p **a)** Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{5}$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=x^3-x$.

5p **c)** Determinați numărul elementelor mulțimii $H=\{x^{10}\mid x\in\mathbb{Z}_6\}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$.

5p **c)** Arătați că $F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$, unde $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$.

Găsiți conjugatul lui $z=1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$ V/127

I·1

$E_1)$ $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$

$\Rightarrow i^5=i^4\cdot i=i$ și $i^6=i^4\cdot i^2=i^2=-1$

$E_2)$ $z=1+i-1-i+1+i-1$

$z=i$

$E_3)$ Folosim $z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi$

în cazul nostru $z=i \Rightarrow \bar{z}=-i$

V127
5/2

Determinați valoarea maximă a funcției $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

E_1) TEORIE:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ și $a > 0 \Rightarrow G_f \cup$

$\Rightarrow f$ are minim $= -\frac{\Delta}{4a}$

Dacă $a < 0 \Rightarrow G_f \cap \Rightarrow f$ are maxim $= -\frac{\Delta}{4a}$

E_2) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

$a = -1 < 0 \Rightarrow f$ are maxim egal cu

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} =$$

$$= -\frac{16 - 20}{-4} = -1$$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$3-\sqrt{x^2+3}=x$$

$E_1)$ $3-\sqrt{x^2+3}=x$

$$-\sqrt{x^2+3}=x-3 \mid \cdot(-1)$$

$$\sqrt{x^2+3}=3-x$$

$E_2)$ Cond.: $\begin{cases} x^2+3\geq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ 3-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow x\in(-\infty,3] \end{cases}$

$$I_c=\mathbb{R}\cap(-\infty,3]=(-\infty,3]$$

$E_3)$ $\sqrt{x^2+3}=3-x \mid ()^2$

$$x^2+3=9-6x+x^2$$

$$6x=6 \Rightarrow x=1\in I_c$$

Obs.: se ia punctaj maxim chiar dacă nu se pun condiții dar soluția x verifică în ec. inițială

VIII 2
7/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr din mț. numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

$E_2)$ m. caz posibile : $\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
indep

90 numere

$E_3)$ m. caz favorabile : $\overline{ab}$ cu $a \neq b$

$a \to 9$ v
$b \to 9$ v
indep

81 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{81^{(9}}{90} = \dfrac{9}{10}$

Fie $A(2;3)$, $B(4;0)$, $C(2,0)$. Determinați aria ΔABC V/127 3/5

E_1) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

E_2) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+6+0-0-0-12 =$

$= -6$

E_3) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|-6| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

Arătați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$ VII 27 I/6

$E_1)\ (\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=$

$=(\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)+(\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x)=$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$=1+1=2$

V127
II 1a)

Fie $\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

Calculați $\Delta(1,0)$

E1) $\Delta(1,0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+0-1-0-0 =$

$= 0$

Obs.: Dacă am fi observat, linia 2 = linia 3

$\Rightarrow$ 2 linii identice $\Rightarrow \Delta(1,0) = 0$

V127
II 1b)

Fie $\Delta(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

Arătați că $\Delta(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$

$E_1)$ $\Delta(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=ab^2+b+a^2-a-a^2b-b^2$ (1)

$E_2)$ $(a-1)(b-1)(b-a)=(ab-a-b+1)(b-a)=$

$=ab^2-a^2b-ab+a^2-b^2+ba+b-a=$

$=ab^2+b+a^2-a-a^2b-b^2$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow \Delta(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

VII 27

Fie $\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$, se știe că (II 1c)

$$\Delta(a,b) = (a-1)(b-1)(b-a)$$

Demonstrați că $\Delta(m,n)$ este par, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$

E_1) $\Delta(m,n) = (m-1)(n-1)(n-m)$

E_2) Avem situațiile:

Caz I: m, n par $\Rightarrow n-m$ par $\Rightarrow \Delta(m,n)$ par

Caz II: m par, n impar $\Rightarrow n-1$ par $\Rightarrow \Delta(m,n)$ par

Caz III: m impar, n par $\Rightarrow m-1$ par $\Rightarrow \Delta(m,n)$ par

Caz IV: m, n impare $\Rightarrow n-m$ par $\Rightarrow \Delta(m,n)$ par

$\Rightarrow \forall m,n \in \mathbb{Z}$ avem $\Delta(m,n)$ par

V127

II 2a)

Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația

$$\hat{3}x + \hat{2} = \hat{5}$$

$E_1)$ $\hat{3}x + \hat{2} = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}x = \hat{5} - \hat{2} \Rightarrow \hat{3}x = \hat{3}$

$E_2)$

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$

$\Rightarrow$ soluții $x \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\}$

V/127
II 26)

Găsiți mulțimea valorilor pentru

$f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6, \quad f(x) = x^3 - x$

E_1) mț valorilor $= \operatorname{Im} f = \{ y \mid \exists x \in A_f \text{ a.î. } f(x) = y \}$

E_2) $x = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{0}) = \hat{0}^3 - \hat{0} = \hat{0} - \hat{0} = \hat{0}$

$x = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{1}^3 - \hat{1} = \hat{1} - \hat{1} = \hat{0}$

$x = \hat{2} \Rightarrow f(\hat{2}) = \hat{2}^3 - \hat{2} = \hat{8} - \hat{2} = \hat{6} = \hat{0}$

$x = \hat{3} \Rightarrow f(\hat{3}) = \hat{3}^3 - \hat{3} = \hat{27} - \hat{3} = \hat{24} = \hat{0}$

$x = \hat{4} \Rightarrow f(\hat{4}) = \hat{4}^3 - \hat{4} = \hat{64} - \hat{4} = \hat{60} = \hat{0}$

$x = \hat{5} \Rightarrow f(\hat{5}) = \hat{5}^3 - \hat{5} = \hat{125} - \hat{5} = \hat{120} = \hat{0}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \{ \hat{0} \}$

Găsiți numărul elementelor mulțimii V127
II 20)

$$H=\{x^{10} \mid x \in \mathbb{Z}_6\}$$

$E_1)$ $x=\hat{0} \Rightarrow \hat{0}^{10}=\hat{0}$

$x=\hat{1} \Rightarrow \hat{1}^{10}=\hat{1}$

$x=\hat{2} \Rightarrow \hat{2}^{10}=(\hat{2}^5)^2=\hat{32}^2 \underset{\mathbb{Z}_6}{=} \hat{2}^2=\hat{4}$

$x=\hat{3} \Rightarrow \hat{3}^{10}=(\hat{3}^2)^5=\hat{9}^5 \underset{\mathbb{Z}_6}{=} \hat{3}^5=\hat{243}=\hat{3}$

$x=\hat{4} \Rightarrow \hat{4}^{10}=(\hat{4}^2)^5=\hat{16}^5 \underset{\mathbb{Z}_6}{=} \hat{4}^5=\hat{4}^3\cdot\hat{4}^2=\hat{64}\cdot\hat{16}=$

$\underset{\mathbb{Z}_6}{=} \hat{4}\cdot\hat{4}=\hat{16}=\hat{4}$

$x=\hat{5} \Rightarrow \hat{5}^{10}=(\hat{5}^2)^5=\hat{25}^5 \underset{\mathbb{Z}_6}{=} \hat{1}^5=\hat{1}$

$E_2)$ $H=\{\hat{0};\hat{1};\hat{3};\hat{4}\} \Rightarrow$ 4 elemente

V127
II 1 a)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

E_1) Folosim $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

E_2) în cazul nostru, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

E_3) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(2)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{1}{4}$

V127
III 16

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

Se cere ec. tangentei în $x=1$

E_1) ec. tg în $x=\alpha$

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E_2) în cazul nostru $\alpha=1$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E_3) $f(1)=1+\underbrace{\ln 1}_{0}=1$

E_4) $f'(1)=?$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(1)=-1+1\Rightarrow f'(1)=0$$

E_5) Ec. tg.:

$$y-1=0(x-1)\Rightarrow y-1=0$$

$$\Rightarrow y=1$$

V127

III 1c)

Fie $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, arătați că

$f(x)\geq 1,\ \forall x\in(0;\infty)$

$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{x}=$

$=\frac{-1+x}{x^2}$

$E_2)\ f'(x)=0\Rightarrow -1+x=0\Rightarrow x=1$

$E_3)$

x	0	$\nexists$	1	
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}<0\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f$ ↘ pe $(0;1)$

$f'(2)=\frac{-1+2}{2^2}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(1;\infty)$

$\Rightarrow f$ ↗ pe $(1;\infty)$

$f(1)=1+\ln 1=1$

$E_4)$ Din tabel $\Rightarrow f(x)\geq 1,\ \forall x\in(0;\infty)$

V127
III 20)

Fie $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

Calculati $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$

$E_1)$ $I=\int_0^1 (x+1)\cdot\dfrac{x^2}{x+1}\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=$

$=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$

VII 27
III 261

Fie $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$, calculați

$$\int_1^e (x+1)f(x)\ln x\,dx$$

E1) $I=\int_1^e (x+1)\cdot\frac{x^2}{x+1}\cdot\ln x\,dx=$

$=\int_1^e x^2\cdot\ln x\,dx$

E2) $f=\ln x \Rightarrow f'=\frac{1}{x}$

$g'=x^2 \Rightarrow g=\frac{x^3}{3}$

$I=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e\frac{1}{x}\cdot x^3\,dx=$

$=\frac{e^3}{3}\underbrace{\ln e}_{1}-\frac{1}{3}\underbrace{\ln 1}_{0}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx=$

$=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}(e^3-1)=$

$\overset{3/}{=}\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+1=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}$

Fie $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$, arătați că $F(e-1)=\frac{e^2-4e+7}{2}$ unde F este primitiva lui f pentru care $F(0)=1$ V127 III 2c)

E_1) Găsim mulțimea primitivelor lui f adică

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{x^2}{x+1}dx$$

E_2) $grP > grQ$, $x^2 \mid x+1$, $x-1$; $-x^2-x$; $-x$; $x+1$; 1 și $\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

$$E_3)\ F(x)=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$$

E_4) Dar, $F(0)=1 \Rightarrow 0-0+\underbrace{\ln 1}_{0}+C=1 \Rightarrow C=1$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1$$

$$E_5)\ F(e-1)=\frac{(e-1)^2}{2}-(e-1)+\ln|e-1+1|+1=$$

$$=\frac{e^2-2e+1-2e+2+2+2}{2}=\frac{e^2-4e+7}{2}$$