Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_2=1$ și $b_5=8$.

5p **2.** Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+7$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-3)=\log_5(x-1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,...,50\}$, acesta să fie număr divizibil cu 11.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Rezolvați în mulțimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuația $2\sin x-1=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$.

5p **b)** Verificați dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.

5p **c)** Determinați numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ pentru care $X^2=A$, unde a și b sunt numere reale.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=-2$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=2$.

5p **c)** Pentru $a\neq 0$, determinați un polinom de grad trei, având coeficienții reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este descrescătoare.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 (x+2)f(x)dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$.

M2/V126
I/1

Se cere rația pt progr. geometrică
cu $b_2 = 1$, $b_5 = 8$

E_1) Folosim $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$\Rightarrow b_2 = 1 \Leftrightarrow b_1 q = 1$

$b_5 = 8 \Leftrightarrow b_1 q^4 = 8$

E_2) împărțim relațiile $\Rightarrow \frac{b_1 q}{b_1 q^4} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q^3 = 2^3$

$\Rightarrow q = 2$

Fie $f(x) = x^2 + 2x + 7$

Se cere $(f \circ f)(0) = ?$

$E_1)$ $(f \circ f)(0) = f(f(0))$

$E_2)$ $f(0) = 0 + 0 + 7 = 7$

$E_3)$ $f(f(0)) = f(7) = 7^2 + 14 + 7 =$

$= 49 + 21 = 70$

V126
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$2\log_5(x-3) = \log_5(x-1)$$

E_1) Cond: $\begin{cases} x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow x\in(3;\infty)=I_1 \\ x-1>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow x\in(1;\infty)=I_2 \end{cases}$

E_2) $I_C = I_1 \cap I_2 = (3;\infty)$

E_3) $\log_5(x-3)^2 = \log_5(x-1)$

baza aceeași $\Rightarrow (x-3)^2 = x-1$

$\Rightarrow x^2-6x+9 = x-1$

$\Rightarrow x^2-7x+10=0$

E_4) $x_{1,2} = \dfrac{7\pm\sqrt{49-4\cdot1\cdot10}}{2\cdot1} = \dfrac{7\pm\sqrt{9}}{2} = \dfrac{7\pm3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+3}{2} = 5 \in I_C \\ x_2 = \dfrac{7-3}{2} = 2 \in I_C \end{cases}$

V126 I/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un nr. din $A=\{1,2,3,\dots,50\}$, acesta să fie divizibil cu 11

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : 50

$E_3)$ nr. caz favorabile: 11; 22; 33; 44

$\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{4}{50} = \dfrac{2}{25}$

V126

Găsiți a pentru care $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare, I/5

$\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) în cazul nostru, $\frac{2}{1} = \frac{a+1}{2}$

$\Leftrightarrow 4 = a+1 \Rightarrow a = 3$

V126
I/6

Rezolvați în $(0; \frac{\pi}{2})$ ecuația:

$$2 \sin x - 1 = 0$$

$E_1)$ ecuația $\Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$E_2)$ din tabel $\Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

V/126
II 1a)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$

Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$

E1) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&20\end{pmatrix}$

E2) $B\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&20\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\cdot B=B\cdot A$

V126
II 16)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}$

Verificați dacă

$$\det(A+B) > \det A + \det B$$

E1) $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&9\end{pmatrix}$

E2) $\det(A+B)=\begin{vmatrix}2&0\\0&9\end{vmatrix}=18-0=18$

E3) $\det A=\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}=4-0=4$

$\det B=\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}=5-0=5$

E4) $\left.\begin{array}{l}\det(A+B)=18\\ \det A+\det B=9\end{array}\right\} \Rightarrow \det(A+B) > \det A + \det B$

Determinați numărul matricilor X cu

$X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dacă $X^2=A$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$E_1)$ $X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow X^2=X\cdot X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $X^2=A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=4 \end{cases}$

$E_3)$ Din $a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow a$ are 2 v

Din $b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2 \Rightarrow b$ are 2 v independ

---

regula produsului $\Rightarrow 2\cdot 2=4$ v

$\Rightarrow$ 4 matrici

V126
II 2 a)

Fie $f = X^3 + X + a$. Pentru $a = -2$ calculați $f(1)$

$E_1)$ $a = -2 \Rightarrow f = X^3 + X - 2$

$E_2)$ $f(1) = 1^3 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$

Fie $f = X^3 + X + a$, determinați a dacă

$(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = 2$

E_1) Dacă $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ are rad $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow f$ poate fi descomp. în factori sub forma $f = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

E_2) În cazul nostru, $f = x^3 + x + a$

$\Rightarrow f = 1(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

E_3) Deoarece ne trebuie produsul $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$, înlocuim pe x cu 2

$\Rightarrow f(2) = (2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$

E_4) Dar, $f = x^3 + x + a \Rightarrow f(2) = 8 + 2 + a$

$\Rightarrow f(2) = 10 + a$

Dar, $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = 2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 10 + a = 2 \Rightarrow a = -8$

Fie $f = X^3 + X + a$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Determinați un polinom de gr III cu rădăcini

$\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$

E_1) Dacă x_1 rad $f \Rightarrow f(x_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^3 + x_1 + a = 0 \mid : x_1^3 \neq 0$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1^2} + a \cdot \frac{1}{x_1^3} = 0$

$\Rightarrow 1 + \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right)^3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}$ este rădăcină

pentru $g = 1 + X + aX^3$ (deoarece $g(\frac{1}{x_1}) = 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{x_1}$ rădăcină pentru $g = aX^3 + X + 1$

E_2) Analog $\frac{1}{x_2}$ rad g, $\frac{1}{x_3}$ rad g

$\Rightarrow g = aX^3 + X + 1$ are rădăcini pe

$\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$

Fie $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$, $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln x\right)' = \frac{\frac{x}{1}}{x+1} - \frac{\frac{x+1}{1}}{x} =$

$$= \frac{x - (x+1)}{(x+1)x} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.
Arătați că f este descrescătoare

$E_1)$ $f'(x)=(\ln(x+1)-\ln x)'=\frac{x'}{x+1}-\frac{(x+1)'}{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}$

$E_2)$ Dar, $x\in(0;\infty)\Rightarrow -\frac{1}{x(x+1)}<0$

$\Rightarrow f'(x)<0\to f_{\searrow}$, $\forall x\in(0;\infty)$

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x f(x)$

$E_1)$ $l=\lim\limits_{x\to\infty} x f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

$\infty(\infty-\infty)$

$E_2)$ Deoarece $\log_b A-\log_b B=\log_b \frac{A}{B}$

$\Rightarrow l=\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad \infty\cdot\ln 1$ / $\infty\cdot 0$

$E_3)$ Folosim $n\log_b A=\log_b A^n$

$\Rightarrow l=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ $\quad \ln 1^\infty$

$E_4)$ Fie $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ $\quad 1^\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x}-1\right)^x=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

$E_5)$ $l=\ln e=1$

Fie $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$

Calculați $\int_0^1 (x+2)f(x)\,dx$

$E_1)\ I=\int_0^1 (x+2)\cdot\frac{x}{x+2}\,dx=\int_0^1 x\,dx$

$E_2)\ I=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$

Fie $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$

Arătați că $\int_{2013}^{2014}(f(x)+(x+2)f'(x))dx=1$

mod I (pentru muncitorii)

$E_1)$ $f(x)=\frac{x}{x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$

$E_2)$ $I=\int_{2013}^{2014}\left(\frac{x}{x+2}+(x+2)\cdot\frac{2}{(x+2)^2}\right)dx=$

$=\int_{2013}^{2014}\left(\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}\right)dx=\int_{2013}^{2014}\frac{x+2}{x+2}dx$

$=\int_{2013}^{2014}1\,dx=x\Big|_{2013}^{2014}=2014-2013=1$

mod II (d. cei inteligenți)

$E_1)$ Observăm că $f(x)+(x+2)f'(x)=$

$=(x+2)'f(x)+(x+2)f'(x)=\big((x+2)f(x)\big)'$

$E_2)$ $I=\int_{2013}^{2014}\big((x+2)f(x)\big)'=(x+2)\cdot f(x)\Big|_{2013}^{2014}=$

$=\left[(x+2)\cdot\frac{x}{x+2}\right]\Big|_{2013}^{2014}=2014-2013=1$

Fie $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$. Determinați volumul generat de $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$

$E_1)\ V=\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^2dx$

$E_2)\ V=\pi\int_1^2\left(\frac{x}{\frac{x}{x+2}}\right)^2dx=\int_1^2\left(x\cdot\frac{x+2}{x}\right)^2dx$

$=\pi\int_1^2(x+2)^2dx=\pi\int_1^2(x^2+4x+4)dx=$

$=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+4\cdot x\Big|_1^2\right)=$

$=\pi\left(\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)-2\cdot(4-1)+4(2-1)\right)=$

$=\pi\left(\frac{7}{3}-6+4\right)=\pi\cdot\frac{7-18+12}{3}$

$=\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$