Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

SESIUNE SPECIALA, 2014

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că:

$$3(2+4i)+2(1-6i)=8$$

E1) $N = 3(2+4i)+2(1-6i) =$

$= 6+12i+2-12i$

$= 8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că parabola asociată funcției $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă lui Ox

---

E_1) G_f de gr II tg lui $Ox \Leftrightarrow \Delta=0$

pt că G_f tangent $\Rightarrow$ 1 sg pct de $\cap$ cu Ox

$\Rightarrow$ o singură sol pt $f(x)=0$

E_2) $\Delta=0 \Rightarrow 4-4=0$ adev.

$\Rightarrow G_f$ tangent lui Ox

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $5^{x^2+4} = 5^{4x}$

$E_1)$ $5^{x^2+4} = 5^{4x}$, cum $5 \neq 1$

$\Rightarrow x^2+4 = 4x \Rightarrow x^2-4x+4 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu 1, 3, 5 și 7.

$E_1)$ $N = \overline{ab}$ cu $a \neq b$ și $a, b \in \{1; 3; 5; 7\}$

$E_2)$ $a \rightarrow$ 4 variante

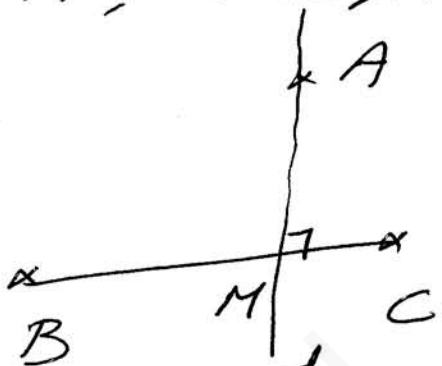
$b \rightarrow$ 3 variante pt că $a \neq b$

independent

$\Rightarrow 4 \cdot 3 = 12$ numere

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Găsiți ec. dreptei d ce trece prin A și este $\perp$ pe BC.



E_1) Fie d cu $d \perp BC$ și $A \in d$

E_2) $d \perp BC \Rightarrow m_d \cdot m_{BC} = -1$

E_3) $B(-4,-2)$, $C(4,2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2+2}{4+4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

E_4) $m_d \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_d \cdot \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow m_d = -2$

E_5) Știm $A(-2,2)$, știm $m_d = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ folosim: $y - y_A = m_d(x - x_A)$

$$\Rightarrow y - 2 = -2(x+2)$$

$$y - 2 = -2x - 4$$

$$2x + y - 2 + 4 = 0$$

$$\boxed{2x + y + 2 = 0}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$

$E_1)$ $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{180^\circ}{4}=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

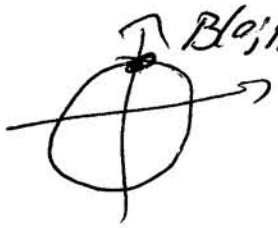
$E_2)$ $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{3\cdot 180^\circ}{4}=\cos(3\cdot 45^\circ)=\cos(135^\circ)=$

$=\cos(90^\circ+45^\circ)$

$E_3)$ folosim $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\Rightarrow \cos(90^\circ+45^\circ)=\cos 90^\circ\cos 45^\circ-\sin 90^\circ\sin 45^\circ=$

$=0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



$E_4)$ $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=1$

$E_1)$ $A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2|\det A(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$, găsiți $n\in\mathbb{N}$

dacă $A(n)\cdot A(1)=A(3)$

$E_1)$ $A(n)\cdot A(1)$ ==înlocuiesc==

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1}-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_2)$ $A(3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ Dacă $A(n)\cdot A(1)=A(3)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2^{n+1}=8 \Rightarrow 2^{n+1}=2^3 \Rightarrow n+1=3 \Rightarrow n=2 \\ 2^{n+1}-1=7 \Rightarrow 2^{n+1}=2^3 \Rightarrow n+1=3 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

$E_4)$ Valoarea lui n este aceeași

$\Rightarrow n=2$ sol corectă

Prof. Ovidiu Bădescu

V/30

Fie $A(n)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&2^n-1&1\end{pmatrix}$, găsiți $p,q\in\mathbb{N}$ (I 10)

dacă $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$

E1) $A(p)\cdot A(q)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^p&0\\0&2^p-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^q&0\\0&2^q-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{p+q}&0\\0&2^{p+q}-2^q+2^q-1&1\end{pmatrix}$

E2) $A(pq)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{pq}&0\\0&2^{pq}-1&1\end{pmatrix}$

E3) Din $A(p)\cdot A(q)=A(pq)\Rightarrow\begin{cases}2^{p+q}=2^{pq}\\2^{p+q}-1=2^{pq}-1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow p+q=pq\Rightarrow p(1-q)=-q$; dar $p,q\in\mathbb{N}\Rightarrow$

E4) Cazul I: $q=1\Rightarrow p\cdot 0=1$, k.o

Cazul II: $q\neq 1\Rightarrow p=\frac{-q}{1-q}=\frac{1-q-1}{1-q}=1-\frac{1}{1-q}$

Cum $q\in\mathbb{N}$, pt ca $p\in\mathbb{N}$ e necesar ca $1-q\in D_1$

$\Rightarrow 1-q\in\{\pm1\}\Rightarrow -q\in\{0;-2\}\Rightarrow q\in\{0;2\}$

E5) $q=0\Rightarrow p=1-\frac{1}{1}\Rightarrow p=0$ și $p,q\in\mathbb{N}\Rightarrow$ OK

$q=2\Rightarrow p=1-\frac{1}{1-2}\Rightarrow p=2$ și $p,q\in\mathbb{N}\Rightarrow$ OK

Obs.: Condiția $1-q\in D_1$ ne dădea valorile lui q pt care $\frac{1}{1-q}\in\mathbb{Z}$ și obțineam $p\in\mathbb{Z}$, deci erau valori posibile, trebuia verificat dacă pt acele valori aveam $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$, calculați

$f(0) = ?$

$E_1)\ f(0) = 0^3 + 0^2 - 3 \cdot 0 + 2$

$\Rightarrow f(0) = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$, calculați câtul și restul lui $f : (X^2 - 4)$

E4) $X^3 + X^2 - 3X + 2 \;\big|\; X^2 - 4$

$-X^3 \quad +4X$

$\backslash \; X^2 + X + 2$

$-X^2 \quad +4$

$/ \quad X + 6$

E2) ⇒ câtul $C(X) = X + 1$

restul $R(X) = X + 6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 3X + 2$, arătați că

$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 20$ dacă

x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f

$E_1)$ $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 =$

$= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2) +$

$+ (x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2) =$

$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$E_2)$ Din VIÈTE $\Rightarrow S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -1$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -3$

$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -2$

$E_3)$ $\exists$ formula

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-3) = 7$

$E_4)$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_2 = -3$ și înlocuind

$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = 2 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) = 20$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=3x+e^x$, calculați $f'(x)$

Eq) $f'(x)=(3x+e^x)'=3+e^x$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 3x + e^x$, calculați ec. asimpt oblice spre $-\infty$ la G_f

---

E_1) as. oblică: $y = mx + n$ unde

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x + e^x}{x} \overset{\frac{-\infty + 0}{-\infty}}{\overset{l'H}{=}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + e^x}{1} \overset{\frac{3+0}{1}}{=} 3 \in \mathbb{R}$$

E_2) $n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} (3x + e^x - 3x)$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x \overset{e^{-\infty} = 0}{=} 0 \in \mathbb{R}$$

E_3) $\Rightarrow y = 3x + 0 \Rightarrow y = 3x$ este ec. asimpt oblică spre $-\infty$

Prof. Ovidiu Badescu

VI 30
II 9c)

Fie $f(x)=3x+e^x$, arătați că

$f(x)\geq 4x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)\geq 4x+1 \Leftrightarrow 3x+e^x\geq 4x+1$

$\Leftrightarrow 3x+e^x-4x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0$

$E_2)$ Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x-x-1$

$g'(x)=e^x-1$, $g'(x)=0\Rightarrow e^x-1=0$

$\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$

$E_3)$

x		0	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

Pt a găsi semnul lui $g'(x)$, calculăm

$g'(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$ pt că $e=2,7\ldots$

$\Rightarrow g'(x)<0$ pe $(-\infty;0)\Rightarrow g\searrow$ pe $(-\infty;0]$

$g'(1)=e-1>0$ pt că $e=2,7\ldots\Rightarrow g'(x)>0$ pe

$(0;\infty)\Rightarrow g\nearrow$ pe $[0;\infty)$

$E_4)$ $g(0)=e^0-0-1=0 \xrightarrow{\text{fals}}$

$g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x-x-1\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)\geq 4x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$, arătați că

$$\int_0^1 (x^2+x+1)\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{4}$$

E) $I=\int_0^1 (x^2+x+1)\cdot \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx=\int_0^1 x^3\,dx=$

$$=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}$, arătați că

$$\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$E_1)\ I=\int_0^1\left(\frac{x^3}{x^2+x+1}-x+1\right)dx=$ (x^2+x+1 / x^2+x+1)

$$=\int_0^1 \frac{x^3-x^3+x^2-x^2+x+1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$E_2)$ folosim forma canonică $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \frac{1}{1\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{-3}{4}}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$E_3)$ not $t=x+\frac{1}{2}\ |\ (\,)'\Rightarrow dt=dx$

$x=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}$, $\quad x=1\Rightarrow t=\frac{3}{2}$

$$E_4)\ I=\int_{1/2}^{3/2}\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_{1/2}^{3/2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\pi}{3}\qquad\frac{\pi}{6}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$, arătați că

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{1}{4}$$

$E_1)\ l=\lim_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(x)dx}{t^4}$

$E_2)$ Dar, deoarece $\int_a^a f(x)dx=0\Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t f(x)dx=0$$

$$E_3)\Rightarrow l\overset{\substack{\frac{0}{0}\\ l'H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\int_0^t f(x)dx\right)'}{(t^4)'}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{4t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2+t+1}}{4t^3}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^2+t+1}\cdot\frac{1}{4t^3}\overset{\frac{1}{0+0+1}\cdot\frac{1}{4}}{=}\frac{1}{4}$$

Prof Ovidiu Badescu