Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

TOAMNA, 2014

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numărul real m știind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=3$ și $BC=3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 2x^2-2x & 4x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x știind că $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+aX-2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=2(a-3)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că polinomul f este divizibil prin X^2-X+1.

5p **c)** Pentru $a=3$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(2^x)=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că ecuația $f(x)=1$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=1-\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Prof. Ovidiu Badescu

V 129
7/1

Găsiți partea reală pentru

$$z = 1 + 2i + 3i^2$$

$E_1)$ $i^2 = -1 \Rightarrow z = 1 + 2i - 3$

$$\Rightarrow z = -2 + 2i$$

$E_2)$ $\operatorname{Re} z = -2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V129
I/2

Găsiți coord pct de intersecție al graficelor lui $f(x)=x-1$ și $g(x)=3x-5$

$E_1)$ $f(x)=g(x) \Rightarrow x-1=3x-5$

$\Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2$

$E_2)$ $x=2 \Rightarrow f(2)=2-1=1$

$\Rightarrow M(2;1)$

met II:

Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y=x-1 \\ y=3x-5 \end{cases}$

$\Rightarrow -4 : 0=-2x+4$

$\Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

înlocuim $y=x-1 \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow y=1$

$M(2,1)$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați $3^{x^2-x} = 3^{2x}$

V/129
1/3

$E_1)$ $x^2 - x = 2x$

$x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/129
I/4

Găsiți câte numere pare de două cifre se pot forma cu 0, 1, 2 și 3

$E_1)$ $N = \overline{ab}$, $a, b \in \{0; 1; 2; 3\}$

$E_2)$ N par $\Rightarrow$ $b \in \{0; 2\}$

$E_3)$ $b = 0 \Rightarrow \overline{a0} \Rightarrow a$ are 3 variante

$b = 2 \Rightarrow \overline{a2} \Rightarrow a$ are 3 variante

$E_4)$ în total $3 + 3 = 6$ variante

$\Rightarrow$ 6 numere

met II: $N = \overline{ab}$, $a, b \in \{0; 1; 2; 3\}$

$a \neq 0 \Rightarrow a$ are 3 v

$b \in \{0; 2\} \Rightarrow b$ are 2 v

independ

$3 \cdot 2 = 6$ numere

Prof. Ovidiu Badescu

V1.29
3/5

Fie $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$.
Găsiți m dacă $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$E_1)$ $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = (m+1)\vec{i} + 4\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$$(m+1)\vec{i} + 4\vec{j} = 2(3\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$(m+1)\vec{i} + 4\vec{j} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$$

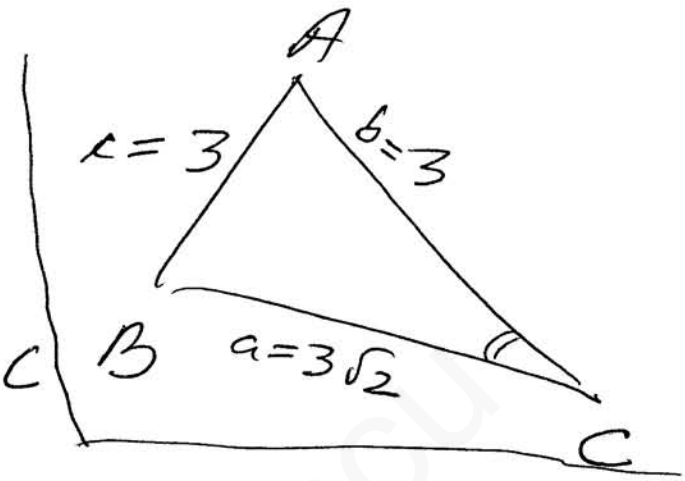
$E_2) \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 6 \\ 4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = 5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V129
I/6

Fie ΔABC cu $AB = AC = 3$ și $BC = 3\sqrt{2}$

Se cere $\cos C$



$E_1)$ T. cos. pt AB^2

$\Rightarrow c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

$E_2)$ $9 = 9 + 18 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\cos C$

$-18 = -18\sqrt{2}\cos C$

$\Rightarrow \cos C = \frac{-18}{-18\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

V129
II 9a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=1$

E1) $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0-0$

$\Rightarrow \det(A(0))=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/129
II 76)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$

$E_1)$ $A(x+y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2-2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}\cdot$

$\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 2y^2-2y & 4y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x^2-2x+4xy+2y^2-2y & 4x+4y & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ Rămâne de arătat că

$2(x+y)^2-2(x+y)=2x^2-2x+4xy+2y^2-2y$

$\Leftrightarrow 2(x^2+2xy+y^2)-2x-2y=2x^2-2x+4xy+2y^2-2y$

$2x^2+4xy+2y^2=2x^2+4xy+2y^2$ adev.

$E_4)\Rightarrow A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V129
I 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2-2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$

Găsiți x dacă $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$, știind că $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$

E_1) Din $A(x+y)=A(x)\cdot A(y) \Rightarrow$

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ $(*)$

E_2) $A(x)\cdot A(x)\cdot A(x) \overset{(*)}{=} A(x+x)\cdot A(x) =$

$= A(2x)\cdot A(x) \overset{(*)}{=\!=} A(2x+x) =$

$= A(3x)$

E_3) ec. $A(x^2+2)=A(x)\cdot A(x)\cdot A(x)$

devine $A(x^2+2)=A(3x)$

$\Rightarrow x^2+2=3x \Rightarrow$

$x^2-3x+2=0$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}\begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow 1\end{matrix}$

$x\in\{1,2\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VII 29
I 2 c)

Fie $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$.

Arătați că $f(2) = 2(a-3)$

E.) $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 2$

$f(2) = 8 - 12 + 2a - 2$

$f(2) = -6 + 2a$

$f(2) = 2(a-3)$

Prof. Ovidiu Băescu

V129
II 2 b)

Fie $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $f : (X^2 - X + 1)$

E_1) Folosim $f : g \Leftrightarrow$ restul $f : g$ este 0

E_2) $X^3 - 3X^2 + aX - 2 \;\big|\; X^2 - X + 1$

$\quad X - 2$

$\quad -X^3 + X^2 - X$

$\quad -2X^2 + (a-1)X - 2$

$\quad\quad 2X^2 - 2X + 2$

$\quad [(a-1) - 2]X$

E_3) Restul este $(a-3)X$ și restul este 0

$\Leftrightarrow a = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V129
II 2c)

Fie $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, pentru $a = 3$ rezolvați $f(2^x) = 0$

$E_1)$ $a = 3 \Rightarrow f = X^3 - 3X^2 + 3X - 2$

$E_2)$ $f(2^x) = 0 \Rightarrow (2^x)^3 - 3\cdot(2^x)^2 + 3\cdot 2^x - 2 = 0$

$E_3)$ not $t = 2^x > 0$

$\Rightarrow t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = 0$

$E_4)$ $D_{-2} = \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow$ Horner

	t^3	t^2	t	t^0
	1	−3	3	−2
~~1~~	~~1~~	~~1·1−3 = −2~~	~~1·(−2)+3 = 1~~	~~1·1−2 = −1 ≠ 0~~
2	1	2−3 = −1	−2+3 = 1	2−2 = 0 ok

$\Rightarrow$ ec. devine $(t-2)(1\cdot t^2 - 1\cdot t + 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ \text{sau} \\ t^2 - t + 1 = 0, \ \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \\ \Rightarrow t_{1,2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

$E_5)$ $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$ VII29 VII 9a)

Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$

$E_1)\ f'(x)=\left(\dfrac{xe^x}{x+2}\right)'=\dfrac{(xe^x)'(x+2)-(xe^x)(x+2)'}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{(1\cdot e^x+xe^x)(x+2)-xe^x\cdot 1}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{e^x(x+2e^x+x^2e^x+2xe^x-xe^x}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}$

Prof. Oniu Bădescu

Fie $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$

Găsiți ec. tangentei la G_f în punctul $x_0=0$ de pe G_f

E_1) Ec. tg în $x=\alpha$ este $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

E_2) în cazul nostru, $\alpha=0\Rightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$

E_3) $f(0)=\dfrac{0e^0}{0+2}=0$

E_4) $f'(0)=?$, $f'(x)=\dfrac{(xe^x)'(x+2)-(xe^x)\cdot 1}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{(1e^x+xe^x)(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{e^x\cancel{x}+2e^x+x^2e^x+2xe^x-\cancel{xe^x}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{2e^0}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

E_5) ec. tg.: $y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x\Rightarrow$

$$2y=x\Rightarrow x-2y=0$$

Prof. Ovidiu Badescu

V/129
II 1c)

Fie $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$

Arătați că ec. $f(x)=1$ are cel puțin o soluție în $(1,2)$

E_1) Vom folosi proprietatea:

„Dacă g cont pe (a,b) și $g(a)\cdot g(b)<0 \Rightarrow$ g are cel puțin o rad $\in(a,b)$"

E_2) ec. $f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{xe^x}{x+2}-1=0$

E_3) Fie $g:(1,2)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}-1$

$\Rightarrow g$ cont pe $(1,2)$ (1)

$g(1)=\dfrac{1e}{1+2}-1=\dfrac{e}{3}-1=\dfrac{e-3}{3}<0$ pt că $e=2,7\ldots$

$g(2)=\dfrac{2e^2}{2+2}-1=\dfrac{2e^2}{4}-1=\dfrac{2(e^2-2)}{4}>0$ pt că $e=2,7\ldots$

$\Rightarrow g(1)\cdot g(2)<0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$ ec.

$g(x)=0$ are cel puțin o rad $\in(1,2)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$, arătați că $I_1 = 1 - \ln 2$

$E_1)\ I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \overset{grp=sup}{=\!=\!=} \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{x+1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx =$

$= \int_0^1 1\,dx - \frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^1 =$

$= x\Big|_0^1 - (\ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0}) =$

$= (1-0) - \ln 2 = 1 - \ln 2$

Prof. Ovidiu Badescu

V/129

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$, arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E1) Calculăm $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^n}{1+x^n} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(1+x^n) - x^n(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{2n+1} - x^n - x^{2n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\,dx$$

E2) Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow x^n \geq 0$, $1+x^{n+1} > 0$,

$1+x^n > 0$ și $x-1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Prof. Ovidiu Badescu

V/229

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$, arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

E1) nu pot aplica T de medie deoarece un capăt al integralei este 1

E2) încadrăm:

$x \in [0;1] \Rightarrow \quad 0 \le \frac{x^n}{1+x^n} \le x^n \Big| \int_0^1 __\,dx$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx$

$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \Rightarrow$

$0 \le I_n \le \frac{1}{n+1} - 0$

E3) trecând la limită, deci

$$0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$
$$\searrow 0 \qquad 0 \swarrow$$

$\Rightarrow I_n \to 0$

Prof. Ovidiu Badescu