Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

VARA REZERVA, 2014

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $x=?$ dacă numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice V128 I/1

E_1) a, b, c progr geometrică $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$

E_2) $2 \cdot (x+5) = 4^2 \Leftrightarrow 2x+10=16$

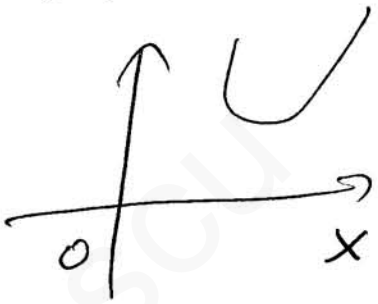
$\Leftrightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V128
I/2

Arătați că parabola asociată lui $f(x) = x^2 + x + 4$ este situată deasupra lui Ox

E1) Vom arăta că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$



at că graficul este de forma

E2) $x^2 + x + 4 = 0$

$\Delta = 1 - 16 < 0$

x	
x^2+x+4	$+ + + + + +$

$\Rightarrow x^2 + x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

met II: Deoarece $a = 1 > 0$ și putem pune și condiția $y_V > 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} > 0$

$\Rightarrow \frac{-\Delta}{4 \cdot 1} > 0 \Rightarrow -\Delta > 0 \Rightarrow \Delta < 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V128
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x^2-1}=2$$

E1) Cond.: $x\in\mathbb{R}$

E2) $\sqrt[3]{x^2-1}=2 \mid (\,)^3 \Rightarrow$

$$x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9$$

$$\Rightarrow x=\pm 3$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V128
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>m. caz posibile</u>: $N = \overline{ab}$

$a \to 9$ v
$b \to 10$ v
indep

$9 \cdot 10 = 90$ numere

$E_3)$ <u>m. caz favorabile</u>: $N = \overline{ab}$ cu $a+b=7$

$a=1, b=6$
$a=2, b=5$
- - - - - -
$a=7, b=0$

$\Rightarrow$ 7 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{7}{90}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(-1,4)$, $B(1,2)$, găsiți lungimea vectorului OM unde M e mijlocul lui AB

$E_1)$ M mijl $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-1+1}{2} = 0 \\ y_M = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(0;3)$

$E_2)$ $O(0;0) \Rightarrow |\overline{OM}| = OM \Rightarrow$

$\Rightarrow OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{0^2 + 9} = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

128
I 16

Dacă $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ și $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, să se calculeze $\sin 2x$

$E_1)$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$E_2)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{3}{4} = 1$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$

$E_3)$ Dar, $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$E_4)$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=1$

$E_1)\ A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)\ \det(A(0))=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

Prof. Ovidiu Băescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, arătați că

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

E1) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 4y+1 & 0 \\ 0 & 3y & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2y+2x(4y+1) & 0 \\ 0 & (4x+1)(4y+1) & 0 \\ 0 & 3x(4y+1)+3y & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 8xy+2x+2y & 0 \\ 0 & 16xy+4x+4y+1 & 0 \\ 0 & 12xy+3x+3y & 1 \end{pmatrix}$ (1)

E2) $A(x+y+4xy)=\begin{pmatrix} 1 & 2(x+y+4xy) & 0 \\ 0 & 4(x+y+4xy)+1 & 0 \\ 0 & 3(x+y+4xy) & 1 \end{pmatrix}$ (2)

E3) Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 4x+1 & 0 \\ 0 & 3x & 1 \end{pmatrix}$, $x \neq -\frac{1}{4}$

$A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$, găsiți x dacă $A(x)$ este egală cu inversa ei

---

met I: calculăm $(A(x))^{-1}$ și $A(x)=(A(x))^{-1}$

egalăm elementele $\Rightarrow x=\dots$

met II: Etapa 1 $(A(x))^{-1}=A(x')$

E_2) $A(x')$ inversa lui $A(x) \Rightarrow$

$A(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot A(x)=I_3$

E_3) Dar, $I_3=A(0) \Rightarrow$

$A(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot A(x)=A(0)$

E_4) Din $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$

$\Rightarrow A(x+x'+4xx')=A(x^2+x+4x'x)=A(0)$

$\Rightarrow x+x'+4xx'=0$

$x'(1+4x)=-x \quad | : (1+4x) \neq 0$

$\Rightarrow x'=-\frac{x}{1+4x}$

E_5) Dar, $A(x)=A(x') \Rightarrow x=x' \Rightarrow x=-\frac{x}{1+4x}$

$\Rightarrow x+4x^2=-x \Rightarrow 4x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 4X + 2a$, calculați

$f(0)$

E,) $f(0) = 0^3 + 0^2 - 4 \cdot 0 + 2a$

$f(0) = 2a$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 4X + 2a$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $1+i$ este rădăcină a lui f

---

E1) $x_1 = 1+i$ rad. a lui $f \Leftrightarrow f(1+i) = 0$

E2) $f(1+i) = 0 \Rightarrow (1+i)^3 + (1+i)^2 - 4(1+i) + 2a = 0$

$\Rightarrow (1 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3) + (1 + 2i + i^2) -$

$- 4 - 4i + 2a = 0$

$\Rightarrow (1 + 3i - 3 - i) + (1 + 2i - 1) - 4 - 4i + 2a = 0$

$-2 + 2i + 2i - 4 - 4i + 2a = 0$

$-6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X^2 - 4X + 2a$, pentru $a = 3$ arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -31$ unde x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui f

---

E1) $a = 3 \Rightarrow f = X^3 + X^2 - 4X + 6$

E2) x_1 rădăcină $\Rightarrow x_1^3 + x_1^2 - 4x_1 + 6 = 0$

x_2 rădăcină $\Rightarrow x_2^3 + x_2^2 - 4x_2 + 6 = 0$

x_3 rădăcină $\Rightarrow x_3^3 + x_3^2 - 4x_3 + 6 = 0$

„+": $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 18 = 0$

E3) Din VIETE) $x_1 + x_2 + x_3 = S_1 = -\frac{1}{1} = -1$

E2) Dar, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

Din VIETE $S_1 = -1$ și $S_2 = \frac{-4}{1} = -4$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-1)^2 - 2 \cdot (-4) = 1 + 8 = 9$

E3) înlocuim în E2) $\Rightarrow$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 9 - 4 \cdot (-1) + 18 = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -31$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$\in$) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)'=\dfrac{2x(x-2)-x^2(x-2)'}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, găsiți ec. tangentei la G_f în $x_0=4$ de pe G_f

---

E1) ec. tg.: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\Rightarrow y-f(4)=f'(4)(x-4)$

E2) $f(4)=\frac{16}{2}=8$

E3) $f'(4)=?$, $f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(4)=\frac{16-16}{2^2}=0$

E4) înlocuim:

$y-8=0(x-4) \Rightarrow y=8$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$, găsiți intervalele de monotonie ale lui f, $f:(2;\infty)\to\mathbb{R}$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=$

$$=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=4\end{cases}$$

$E_3)$

x		0		$(2$		4
f'		0		$-$	0	$+$
f			$\searrow$		$\nearrow$	

$E_4)$ Pt a găsi semnul la $f'(x)$, dăm valori

$f'(3)=\frac{9-12}{1^2}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(2;4)$

$\Rightarrow f_\searrow$ pe $(2;4]$

$f'(5)=\frac{25-20}{9}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(4;\infty)$

$\Rightarrow f_\nearrow$ pe $[4;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1} dx$, arătați că

$$I_2 = \frac{1}{3} \ln 2$$

$E_1)$ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

$E_2)$ not $t = x^3+1 \mid ()'$

$\Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$

$E_3)$ $x = 0 \Rightarrow t = 0^3+1 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 1^3+1 \Rightarrow t = 2$

$E_4)$ $I_2 = \int_1^2 \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} dt =$

$= \frac{1}{3} \cdot \ln|t| \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\ln 2 - \ln 1)$

$= \frac{1}{3} \ln 2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1}\,dx$, arătați

ca $I_{n+3} + I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$E_1)$ $I_{n+3} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{x^3+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n+3}+x^n}{x^3+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^3+1)}{x^3+1}\,dx$

$= \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1} dx$, calculați

$\lim_{n\to\infty} I_n = ?$

E_1) Deoarece $x \in [0;1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{x^n}{x^3+1} \le x^n \Big/ \int_0^1 \dots dx$$

E_2) $\Rightarrow 0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx$

$$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

$\to 0$ $\qquad$ $\searrow 0$

$\Rightarrow I_n \to 0$

Prof. Ovidiu Badescu