Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculați z^2.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+6$ **nu** intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x-3)=\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În triunghiul ABC punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, AC. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}a=\sqrt{3}$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\dfrac{\sin a-\cos a}{\cos a+\sin a}=2-\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 1 & 2 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Determinați numerele reale m știind că $\det(A(m))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a astfel încât $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -5\\ 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=3x+3y-xy-6$.

5p **a)** Calculați $1*3$.

5p **b)** Arătați că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x \text{ de } 2014 \text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$ pentru orice număr natural nenul n.

Prof. Ovidiu Bădescu

V137
I/1

Fie $z = 1+i$, calculați z^2

E1) $z^2 = (1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1$

$\Rightarrow z^2 = 2i$

Prof. Ovidiu Bădescu

V127
I/2

Arătați că parabola asociată lui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 6$ nu intersectează axa Ox

---

$E_1)$ $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} =$

$= \dfrac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \notin \mathbb{R}$ pt că $\Delta < 0$

$E_3) \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ cu $G_f \cap Ox$

$\Rightarrow G_f \not\cap Ox$

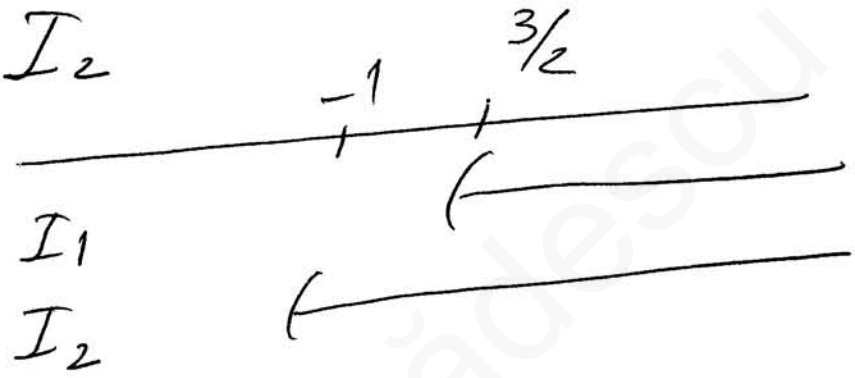
Prof. Ovidiu Bădescu

VII 27
I/3

Rezolvați $\log_2(2x-3) = \log_2(x+1)$

E1) Cond.: $\begin{cases} 2x-3>0 \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right) = I_1 \\ x+1>0 \Rightarrow x \in (-1, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2$



$\Rightarrow I_c = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

E2) $\log_2(2x-3) = \log_2(x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-3 = x+1 \Rightarrow 2x-x = 1+3$

$\Rightarrow x = 4 \in I_c$

$\Rightarrow x = 4$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. de 2 cifre, acesta să fie impar

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. de 2 cifre

au forma $\overline{ab}$ și: $a \to 9$ v

$b \to 10$ v

indep

90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: nr. de 2 cifre impar

$\Rightarrow \overline{ab}$ cu $a \to 9$ v

$b \to 5$ v $(b \in \{1;3;5;7;9\})$

indep

$9 \cdot 5 = 45$

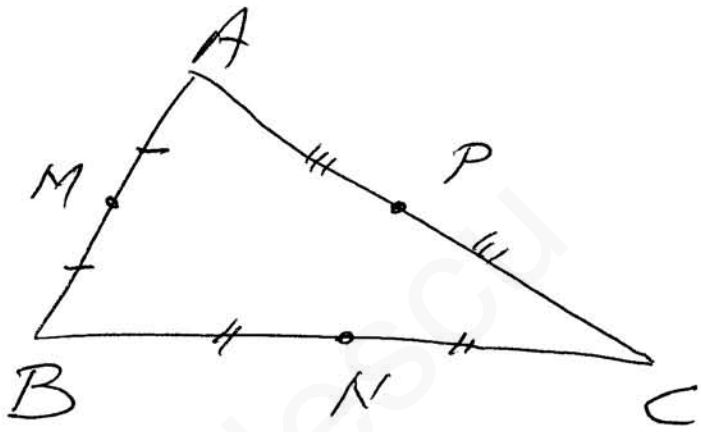
$E_4)$ $P = \dfrac{45}{90} = \dfrac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V127
3/5

În $\triangle ABC$, punctele M, N și P sunt mijloacele lui AB, BC și AC.

Arătați că $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{O}$



E1) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BC}$

$\vec{CP} = \frac{1}{2}\vec{CA}$

---

adun $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$

E2) $S = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CA})$

$S = \frac{1}{2}\vec{AA} = \vec{O}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 2
I/6

Dacă $tg\, a = \sqrt{3}$, arătați că

$$\frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = 2 - \sqrt{3}$$

E1) $tg\, a = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sin a}{\cos a} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin a = \sqrt{3} \cdot \cos a$

E2) $E = \frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = \frac{\sqrt{3}\cos a - \cos a}{\cos a + \sqrt{3}\cos a}$

$$E = \frac{\cos a(\sqrt{3}-1)}{\cos a(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1-3+\sqrt{3}}{1-3}$$

$$E = \frac{2\sqrt{3}-4}{-2} = \frac{2(\sqrt{3}-2)}{-2} = \frac{\sqrt{3}-2}{-1}$$

E3) $E = -(\sqrt{3}-2) = 2-\sqrt{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V127
I 19)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, arătați că

$\det(A(1))=-1$

$E_1)$ $\det(A(1))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=a+2+2-1-4-a$

$=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V127
II 16)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$, găsiți $m \in \mathbb{R}$

dacă $\det(A(m))=0$

E1) $\det(A(m))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m^2+2+2-m-m-4$

$\Rightarrow \det(A(m)) = m^2-2m$

E2) $\det(A(m))=0 \Rightarrow m^2-2m=0$

$\Rightarrow m(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=0 \\ \text{sau} \\ m_2=2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Băescu

V127
II 1c)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}$, găsiți $a\in\mathbb{R}$

dacă $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}$

$E_1)$ $A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&2\\1&2&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1+a+2&1+2+a\\1+a+2&1+a^2+4&1+4a\\1+2+a&1+2a+2a&1+4+a^2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}3&3+a&3+a\\3+a&5+a^2&1+4a\\3+a&1+4a&5+a^2\end{pmatrix}$

$E_2)$ $A(a^2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$

$E_3)$ $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}3&3+a&3+a\\3+a&5+a^2&1+4a\\3+a&1+4a&5+a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a^2&2\\1&2&a^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&2+a&2+a\\2+a&5&-1+4a\\2+a&-1+4a&5\end{pmatrix}$

$E_4)$ Din $A(a)\cdot A(a)-A(a^2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&5&-5\\1&-5&5\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}2+a=1 & \Rightarrow a=-1\\ -1+4a=-5 & \Rightarrow a=-1\end{cases}$ și cum valoarea

lui a este aceeași $\Rightarrow a=-1$ valoare corectă

Prof. Ovidiu Bădescu

Pe $\mathbb{R}$ avem: $x * y = 3x + 3y - xy - 6$

V/127
II 2 a)

Calculați $1 * 3$

E,) $1 * 3 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 6$

$1 * 3 = \cancel{3} + 9 - \cancel{3} - 6$

$1 * 3 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V127
II 261

Fie $x * y = 3x + 3y - xy - 6$, arătați că

$$x * y = 3 - (x-3)(y-3), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

E,) Este mai simplu să pornim cu

$$3 - (x-3)(y-3) = 3 - (xy - 3x - 3y + 9) =$$

$$= 3 - xy + 3x + 3y - 9 =$$

$$= 3x + 3y - xy - 6$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie pe $\mathbb{R}$ legea: $x*y=3x+3y-xy-6$

Găsiți x dacă $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{2014 \text{ ori}}=x$,

știind că $x*y=3-(x-3)(y-3)$ (1)

E_1) Din $x*y=3-(x-3)(y-3) \overset{(1)}{\Rightarrow} x*x=3-(x-3)^2$

E_2) Arătăm prin inducție că

$\underbrace{x*\ldots*x}_{n \text{ ori}}=3-(x-3)^n$, $\forall n \geq 2$

E_3) I $P(2): x*x=3-(x-3)^2$ adev

II Ip. $P(k)$ adev. $\overset{(?!)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k): \underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=3-(x-3)^k$

$P(k+1): \underbrace{x*x*\ldots*x}_{(k+1) \text{ ori}}=3-(x-3)^{k+1}$

E_4) Din $P(k)$ adev $\Rightarrow \underbrace{x*x*\ldots*x}_{k \text{ ori}}=3-(x-3)^k \Big| *, x$

$\Rightarrow \underbrace{x*x*\ldots*x}_{(k+1) \text{ ori}}=\left(3-(x-3)^k\right)*x \overset{(1)}{=}$

$=3-(3-(x-3)^k-3)(x-3)=3-(x-3)^k(x-3)=$

$=3-(x-3)^{k+1} \Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 2$

E_5) $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{2014}=x \Leftrightarrow 3-(x-3)^{2014}=x \Rightarrow x-3=(x-3)$

E_6) not $t=x-3 \Rightarrow t^{2014}-t=0 \Rightarrow t(t^{2013}-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x=3 \\ t_2=1 \Rightarrow x=4 \end{cases}$

$\Rightarrow x \in \{3;4\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$

Arătați că $f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}\right)'=\dfrac{(x-2)'(x^2-4x+5)-(x-2)(x^2-4x+5)'}{(x^2-4x+5)^2}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-4x+5)-(x-2)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+5-(2x^2-4x-4x+8)}{(x^2-4x+5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-4x+5-2x^2+8x-8}{(x^2-4x+5)^2}=\frac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2}$$

E2) Ar trebui arătat că

$$-x^2+4x-3=(1-x)(x-3)$$

Pentru asta, fie $-x^2+4x-3=-(x^2-4x+3)=$

$$=-(x^2-3x-x+3)=-[x(x-3)-(x-3)]=$$

$$=-(x-3)(x-1)=(1-x)(x-3)$$

E3) $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1-x)(x-3)}{(x^2-4x+5)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

Găsiți ec. asimpt spre ∞ la G_f

E_1) <u>as. oriz</u>: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}\overset{\text{gr.sup.q}}{=\!=}0$

$\Rightarrow y=0$ as. oriz spre ∞

E_2) <u>as. oblice</u>: Deoarece G_f are as. oriz spre $\infty \Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$.

Găsiți intervalele de monotonie ale lui f

$E_1)\ f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2-4x+5)-(x-2)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2}=$

$=\dfrac{x^2-4x+5-(2x^2-4x-4x+8)}{(x^2-4x+5)^2}=$

$=\dfrac{x^2-4x+5-2x^2+8x-8}{(x^2-4x+5)^2}=\dfrac{-x^2+4x-3}{(x^2-4x+5)^2}$

$E_2)\ f'(x)=0\Rightarrow -x^2+4x-3=0\ /\cdot(-1)$

$x^2-4x+3=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm2}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=1 \end{cases}$

$E_3)$

x		1		3	
f'	$-\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f'(0)=\dfrac{-3}{(\ )^2}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-\infty;1)\Rightarrow f_\downarrow$ pe $(-\infty;1]$

$f'(2)=\dfrac{-4+8-3}{(\ )^2}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(1;3)\Rightarrow f_\uparrow$ pe $[1;3]$

$f'(4)=\dfrac{-16+16-3}{(\ )^2}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(3;\infty)\Rightarrow f_\downarrow$ pe $[3;\infty)$

$E_4)\ f_\downarrow$ pe $(-\infty;1]\cup[3;\infty)$ și $f_\uparrow$ pe $[1;3]$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx$

Arătați că $I_1 = \frac{e^2+1}{4}$

$E_1) I_1 = \int_1^e x \cdot \ln x \, dx$

$f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x}$

$g' = x \Rightarrow g = \frac{x^2}{2}$

$E_2 | I_1 = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$

$I_1 = \frac{e^2}{2} \cdot \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$

$I_1 = \frac{e^2}{2} \cdot 1 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e$

$I_1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1)$

$I_1 = \frac{2e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx$

Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E_1) Calculăm $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \ln^{n+1} x \, dx - \int_1^e x \ln^n x \, dx$

$$= \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1) \, dx$$

E_2) Dacă $x \in [1, e] \Rightarrow 1 \leq x \leq e \quad / \ln(\cdot)$

$$\Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e \Rightarrow$$

$$0 \leq \ln x \leq 1$$

$$\Rightarrow \ln^n x \geq 0 \text{ și } \ln x - 1 \leq 0$$

E_3) $x \ln^n x (\ln x - 1) \leq 0 \quad / \int_1^e \cdots dx$

$$\Rightarrow \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1) \, dx \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_1^e x \ln^n x \, dx$

Arătați că $2I_{n+1} + (n+1) I_n = e^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$E_1)$ $I_{n+1} = \int_1^e x \ln^{n+1} x \, dx$

$E_2|$ $f(x) = \ln^{n+1} x \Rightarrow f'(x) = (n+1) \ln^n x \cdot \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$

$E_3)$ $I_{n+1} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^{n+1} x \Big|_1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e \ln^n x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 \, dx$

$I_{n+1} = \left(\frac{e^2}{2} \underbrace{\ln^{n+1} e}_{1} - \frac{1}{2} \underbrace{\ln^{n+1} 1}_{0} \right) - \frac{n+1}{2} \underbrace{\int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx}_{I_n}$

$E_4) \Rightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \Big| \cdot 2$

$\Rightarrow 2I_{n+1} = e^2 - (n+1) I_n$

$\Rightarrow 2I_{n+1} + (n+1) I_n = e^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Prof. Ovidiu Bădescu