Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $\frac{1+i}{1-i}=a+ib$ și $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție cu axele de coordonate a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{\frac{x+2}{2}}+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$, $B(2,3)$ și $C(0,-2)$. Determinați ecuația paralelei duse prin C la AB.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\frac{1+\sin x}{\sin x}=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Calculați inversa matricei $A(-1)$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (a,b) pentru care matricea $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor egală cu 24.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-3x-3y+4$. Legea „$*$” este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x*y=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1007}*\frac{2}{1007}*\frac{3}{1007}*\ldots*\frac{2014}{1007}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)I_n=\frac{1}{2}$.

V124
I/1

Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\frac{1+i}{1-i} = a+ib$

$E_1)$ $\overline{\frac{1+i}{1+i}} = a+ib \Rightarrow \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = a+bi$

$E_2)$ $\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} = a+bi \Rightarrow \frac{1+2i-1}{1+1} = a+bi$

$i = a+bi \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$

$E_3)$ Dar, $a, b \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți punctele de ∩ ale G_f cu axele de coordonate dacă $f(x) = x^2 - 6x + 8$

V124
I/2

$E_1)$ $G_f \cap Oy$: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 8$

$\Rightarrow f(0) = 8 \Rightarrow A(0; 8) \in G_f$

$E_2)$ $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow B(4; 0) \in G_f$

$C(2; 0) \in G_f$

Prof. Oriu Bădescu

V124
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$9^{\frac{x+2}{2}} + 3^{x+1} = 36$$

E_1) Deoarece $9 = 3^2$

$$\Rightarrow (3^2)^{\frac{x+2}{2}} + 3^{x+1} = 36$$

E_2) $3^{x+2} + 3^{x+1} = 36$

E_3) $3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3 = 36$

E_4) $t = 3^x \Rightarrow 9t + 3t = 36$

$$12t = 36$$

$$t = \frac{36}{12} = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1}$$

Prof. Ovidiu Badescu

V124
I/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să nu conțină cifra 6

E1) $P = \frac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

E2) m. caz posibile : $\overline{ab}$,

$a \to 9V$

$b \to 10V$

independ

$9 \cdot 10 = 90$ numere

E3) m. caz favorabile : $\overline{ab}$ cu $a \neq 6$, $b \neq 6$

$a \to 8V$

$b \to 9V$

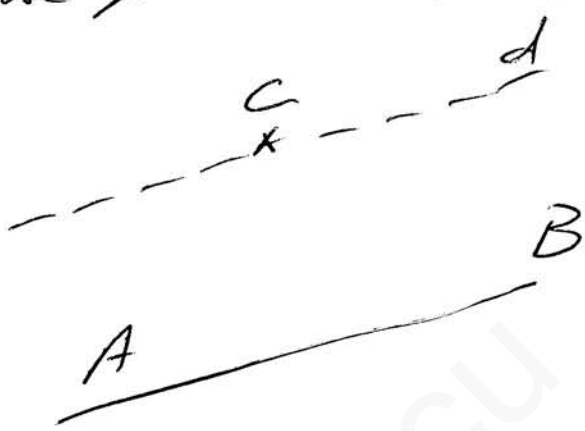
independ

$8 \cdot 9 = 72$ numere

E4) $P = \frac{72^{(9}}{90} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(-1;2)$, $B(2;3)$, $C(0;-2)$. Găsiți ecuația paralelei duse prin C la AB



E_1) Fie d dreapta cerută

E_2) $d \parallel AB \Rightarrow m_d = m_{AB}$

E_3) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-2}{2+1} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_d = \frac{1}{3}$

E_4) $d \parallel AB \Rightarrow m_{AB} = m_d$

ec. d: $y - y_C = m_d(x - x_C)$

$y + 2 = \frac{1}{3}(x - 0) \mid \cdot 3$

$3y + 6 = x$

$\boxed{x - 3y - 6 = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V124
J16

Găsiți $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ dacă

$$\frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\cos x}$$

$E_1)$ $\frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{1+\cos x}{\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x(1+\sin x) = \sin x(1+\cos x)$

$\Rightarrow \cos x + \cos x \sin x = \sin x + \sin x \cos x$

$\Rightarrow \sin x = \cos x$

$E_2)$ $\sin x = \cos x \mid : \cos x$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/2 4

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, arătați că I 1a)

$$\det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$$

$E_1)\ \det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=$

$=a^3-3a+2$ (1)

$E_2)\ (a+2)(a-1)^2=(a+2)(a^2-2a+1)=$

$=a^3-2a^2+a+2a^2-4a+2=$

$=a^3-3a+2$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow \det(A(a))=(a+2)(a-1)^2$

Prof. Ovidiu Badescu

V124
II 16)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, calculați

inversa lui $A(-1)$

E1) $A(-1)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{not}{=} M$

E2) $\det M=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1+1+1+1+1=4\neq 0$

$\Rightarrow \exists M^{-1}$

E3) $M^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calc. M^* unde

$m^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-1=0$

$m^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-(-1-1)=2$

$m^*_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2$

$m^*_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-(-1-1)=2$

$m^*_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1-1=0$, analog $m^*_{23}=2$,

$m^*_{31}=2,\ m^*_{32}=2;\ m^*_{33}=0 \Rightarrow M^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

E4) $M^{-1}=\frac{1}{\det M}\cdot M^*=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți perechile de numere naturale (a,b) V124 II 10)
dacă $A(a)\cdot A(b)$ are suma elementelor 24
unde $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$E_1)$ $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} ab+2 & a+b+1 & a+1+b \\ a+b+1 & 2+ab & a+b+1 \\ a+b+1 & 1+b+a & 2+ab \end{pmatrix}$$

$E_2)$ Suma elementelor este 24 $\Rightarrow$

$3(ab+2)+6(a+b+1)=24 \mid :3$

$ab+2+2(a+b+1)=8$

$ab+2a+2b+4=8$

$ab+2a+2b=4$, $a,b\in\mathbb{N}$

$E_3)$ Cazul I: $a=0\Rightarrow 2b=4\Rightarrow b=2\Rightarrow \boxed{(0;2)}$

Cazul II: $a=1\Rightarrow b+2+2b=4\Rightarrow 3b=2\Rightarrow b=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$

Cazul III: $a=2\Rightarrow 2b+4+2b=4\Rightarrow 4b=0\Rightarrow b=0\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{(2;0)}$

Cazul IV: $a=3\Rightarrow 3b+6+2b=4\Rightarrow 5b=-2<0$ Fals

Deoarece $a>3\Rightarrow b<0$ Fals

Prof. Ovidiu Badescu

V/124
II 2a)

Fie $x*y = 3xy - 3x - 3y + 4$

Arătați că $x*y = 3(x-1)(y-1)+1$

$\in_1)$ $3(x-1)(y-1)+1 = 3(xy - x - y + 1) + 1 =$

$= 3xy - 3x - 3y + 3 + 1 =$

$= 3xy - 3x - 3y + 4 = x*y$

Prof. Ovidiu Bădescu

V124
II 2 67

Fie $x*y = 3xy - 3x - 3y + 4$, calculați

$$\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \ldots * \frac{2014}{1007}$$

E_1) Forma restrânsă

$$x*y = 3x(y-1) - 3(y-1) + 1$$

$$x*y = (y-1)(3x-3) + 1$$

$$x*y = (y-1)\,3(x-1) + 1$$

$$x*y = 3(x-1)(y-1) + 1$$

E_2) Observăm că $x*1 = 3(x-1)\cdot 0 + 1 \Rightarrow x*1 = 1$

Observăm că $1*y = 3\cdot 0(y-1) + 1 \Rightarrow 1*y = 1$

$$E_3) \frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \ldots * \frac{2014}{1007} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{1007} * \frac{2}{1007} * \ldots * \frac{1006}{1007}\right)}_{x} * \frac{1007}{1007} * \underbrace{\left(\frac{1008}{1007} * \ldots * \frac{2014}{1007}\right)}_{y}$$

$$= (x*1)*y = 1*y = 1$$

Prof. Ovidiu Badescu

V124
II 2c)

Fie $x*y = 3xy - 3x - 3y + 4$, găsiți x dacă x este egal cu simetricul său

---

E_1) * <u>comutativă</u>: $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x*y = y*x$

$x*y = 3xy - 3x - 3y + 4$
$y*x = 3yx - 3y - 3x + 4$ } egalitate

E_2) * <u>are el neutru</u>: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$x*e = e*x = x$

$x*e = x \Rightarrow 3xe - 3x - 3e + 4 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow e(3x-3) = 4x - 4 \Leftrightarrow 3e(x-1) = 4(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3e = 4 \Rightarrow e = \frac{4}{3}$

Dacă * comut $\Rightarrow x*e = e*x \Rightarrow e = \frac{4}{3}$ el neutru

E_3) <u>simetricul lui x</u>: $\exists x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x*x' = x'*x = e$

$x*x' = e \Rightarrow 3xx' - 3x - 3x' + 4 = \frac{4}{3} \mid \cdot 3$

$9xx' - 9x - 9x' + 12 = 4 \Rightarrow x'(9x-9) = -8 + 9x$

Dacă $x \neq 1 \Rightarrow x' = \frac{9x-8}{9x-9}$ căci $x = 1 \Rightarrow x' \cdot 0 = 1$ fals

Dacă * comut $\Rightarrow x*x' = x'*x \Rightarrow x' = \frac{9x-8}{9x-9}$

E_4) $x = x' \Rightarrow x = \frac{9x-8}{9x-9} \Leftrightarrow 9x^2 - 9x = 9x - 8$

$\Rightarrow 9x^2 - 18x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{18} =$

$= \frac{18 \pm \sqrt{36}}{18} = \frac{18 \pm 6}{18} \begin{cases} \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \\ \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/124

III 19)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

Se cere ecuația as. oblice la G_f

$E_1)$ $D_f=(1;\infty)\Rightarrow f$ poate avea as. la $+\infty$

$E_2)$ <u>as. oblică</u>: $y=mx+n$ unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2-x}=$$

$$\Rightarrow m=1\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1}=$$

$$\Rightarrow n=1\in\mathbb{R}$$

$E_3)$ ec. as. oblice: $y=x+1$

Prof. Ovidiu Pădescu

VII 26
Tip 16)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$

Se cere ec. tangentei la G_f în $x=2$ de pe G_f

E_1) ec. tg în $x=\alpha$ este:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E_2) în cazul nostru, $\alpha=2$

$$\Rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

E_3) $f(2)=\dfrac{4+2}{1}=6$

E_4) $f'(2)=?$

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)'=\frac{(x^2+2)'(x-1)-(x^2+2)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{2x(x-1)-(x^2+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(2)=\frac{4-4-2}{(2-1)^2}=\frac{-2}{1}=-2$$

E_5) ec. tg.: $y-6=-2(x-2)\Rightarrow$

$y-6=-2x+4\Rightarrow \boxed{2x+y-10=0}$

Prof. Ovidiu Badescu

VII 24
III 1d)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$

Se cere $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{x+3}$

$$E_1)\ l=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x^2+2}{x-1}}{x}\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x+3}\quad 1^\infty$$

$$E_2)\ l\overset{1^\infty}{=}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2}{x^2-x}-1\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2-x^2+x}{x^2-x}\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+2}{x^2-x}\right)^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-x}\cdot(x+3)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x^2-x}$$

$$=e\qquad =e^1=e$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V124
III 2a)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, calculați

$I_1 = ?$

$\in_1)$ $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$

$= \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx =$

$= x\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 =$

$= (1-0) - (\ln 2 - \ln 1) =$

$= 1 - \ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$, arătați că V/124 II 26)

$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$E_1) I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V124
III 2c)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$. Se știe că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, se cere $\lim_{n\to\infty}(n+1)I_n = \frac{1}{2}$

E_1) monotonia: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{x+1}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx$$

E_2) $x \in [0;1] \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^n}{x+1} \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x+1} \leq 0$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} \leq I_n}$$

E_3) Din $I_{n+1} \leq I_n \,/ + I_n \Rightarrow I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \,/ \cdot (n+1)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq (n+1)I_n}$$

E_4) Din $I_{n+1} \leq I_n \,/ + I_{n+1} \Rightarrow 2I_{n+1} \leq I_n + I_{n+1}$

$\Rightarrow 2I_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)} \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{2n}$

E_5) $I_n \leq \frac{1}{2n} \,/ \cdot (n+1) \Rightarrow \boxed{(n+1)I_n \leq \frac{n+1}{2n}}$

E) $\frac{1}{2} \leq (n+1)I_n \leq \frac{n+1}{2n}$ $\xrightarrow{\text{cleste}}$ $(n+1)I_n \to \frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu