Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\dfrac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-12$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3(6x-12)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC, știind că $BC=8$, $A=\dfrac{\pi}{4}$ și $C=\dfrac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -x\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculați $f(-1)$.

5p **b)** Determinați numărul real m știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $I_n=n!\left(e-1-\dfrac{1}{1!}-\ldots-\dfrac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

V123
I/1

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $a+ib$ este conjugatul lui $z = \frac{1+i}{1-i}$

$E_1)$ $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$

$E_2)$ $z = i \Rightarrow \bar{z} = -i = 0+(-1)i \Rightarrow a=0$
$b=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V123
I/2

Determinați coordonatele vârfului parabolei $f(x) = x^2 + 4x - 12$

E1) $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

E2) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}{2 \cdot 1} = -\frac{16 + 48}{4} = -\frac{64}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = -16$$

E3) $V(-2, -16)$

Prof. Ovidiu Bădescu

I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(x^2-4)=\log_3(6x-12)$$

E1) Cond.: $\begin{cases} x^2-4>0 \\ 6x-12>0 \end{cases}$

$x^2-4>0$, $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x^2-4>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)=I_1$

$6x-12>0 \Rightarrow 6x>12 \Rightarrow x>2$

$\Rightarrow x\in(2,\infty)=I_2$

$I_c=I_1\cap I_2=(2,\infty)$

E2) Fiind aceeași bază,

$$\log_3(x^2-4)=\log_3(6x-12)$$

$$\Rightarrow x^2-4=6x-12$$

$$\Rightarrow x^2-6x+8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 2}{2} \begin{matrix} \nearrow 4\in I_c \\ \searrow 2\notin I_c \end{matrix}$$

E5) $S_f: x=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. naturale de trei cifre, $\overline{abc}$ cu $a \to 9$ ✓
$b \to 10$ ✓
$c \to 10$ ✓
independent
$\Rightarrow 9 \cdot 10^2 = 900$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: numerele de 3 cifre divizibile cu 100 sunt $\{100; 200; \dots; 900\}$
adică 9 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{9}{900} = \dfrac{1}{100}$

Prof. Ovidiu Bădescu

$\vec{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

Să se calculeze lungimea lui $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$ I/5

E1) $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}| = ?$

E2) îi exprimăm pe toți în funcție de vectori

și folosim $|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$

E3) $\vec{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} =$

$= (4\vec{i} - 3\vec{j}) + (2\vec{i} - 5\vec{j}) =$

$= 6\vec{i} - 8\vec{j}$

$\vec{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$

E4) $S = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} = (4\vec{i} - 3\vec{j}) + (6\vec{i} - 8\vec{j}) + (2\vec{i} - 5\vec{j}) =$

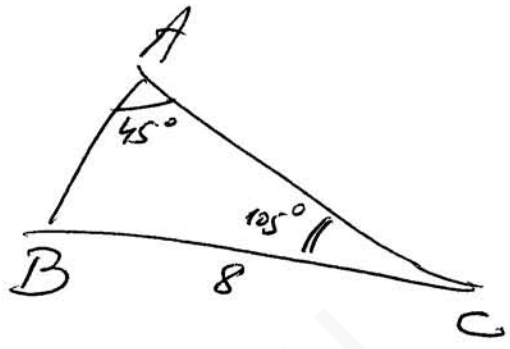
$= 12\vec{i} - 16\vec{j}$

E5) $|S| = \sqrt{12^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați lungimea lui AC dacă $\frac{I}{6}$

$BC=8$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $C=\frac{7\pi}{12}$

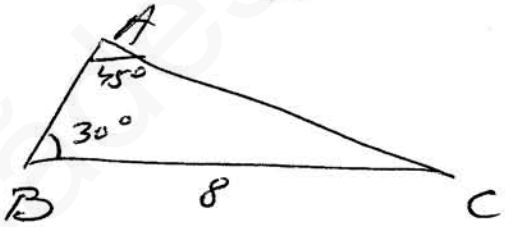


$E_1)$ $A=\frac{\pi}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$

$C=\frac{7\pi}{12}=7\cdot\frac{180^\circ}{12}=7\cdot 15^\circ=105^\circ$

$E_2)$ $A+B+C=180^\circ \Rightarrow 45^\circ+105^\circ+C=180^\circ \Rightarrow B=180^\circ-150^\circ$

$\Rightarrow B=30^\circ$



$E_3)$ Dar, din T. sinusurilor

$\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8}{\sin 45^\circ}=\frac{AC}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 105^\circ}=2R$

Alegem doar $\frac{8}{\sin 45^\circ}=\frac{AC}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{16}{\sqrt{2}}=2AC$

$\Rightarrow 16=2\sqrt{2}AC \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{2}\cdot 16}{2\sqrt{2}}=\frac{16\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)+A(-x)=2A(0),\ \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)\ A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)\ 2A(0)=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

V123

Găsiți x pentru care $\det(A(x))=0$ II 16)

unde $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$

$E_1)\ \det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^2+1+0-$
$-2-0+2x$

$\Rightarrow \det(A(x)) = -x^2+1-2+2x$
$= -x^2+2x-1$

$E_2)\ \det(A(x))=0 \Rightarrow -x^2+2x-1=0 \mid \cdot(-1)$

$\Rightarrow x^2-2x+1=0$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$

$E_3)\ S_f: x=1$

Prof. Ovidiu Baosan

V123
II 1 c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$

Arătați că $\exists$ o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ cu $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E1) Fie $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a.î. $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$

E2) $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+z \\ x+0-z \end{pmatrix}$$

E3) Dar, $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x \quad -z=0 \end{cases}$$

E4) $\det S=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1+1+0-2-0+2$

$=0$

E5) Fiind un sistem liniar omogen cu $\det A=0$

$\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluții

Prof. Ovidiu Bădescu

V123
II 2a)

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$

Calculați $f(-1)$

E1) $f(-1) = (-1)^3 + m \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 1$

$f(-1) = -1 + m - m + 1$

$\Rightarrow f(-1) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pt care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$ (II 26)

E1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (S_1)^2 - 2S_2 = -1$

E2) $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{m}{1} = -m$

$S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{m}{1} = m$

E3) $(S_1)^2 - 2S_2 = -1 \Rightarrow (-m)^2 - 2m = -1$

$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

E4) $S_f : m = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$ cu $m \in \mathbb{R}$. II 2 c)

Determinați valorile lui m pentru care toate rădăcinile lui f sunt reale

---

E_1) ec. de gr III, încercăm Hörner $\forall \Delta_1 = 4 \pm 1$?

E_2)

	X^3	X^2	X	X^0
	1	m	m	1
1	1	1+m	1+2m	2+2m ≠ 0
−1	1	−1+m	1−m+m = 1	−1+1 = 0

E_3) ec. devine: $(X+1)(X^2+(-1+m)X+1) = 0$

$\Rightarrow (X+1)(X^2+(m-1)X+1) = 0$

$\Rightarrow$ $X+1 = 0 \Rightarrow X = -1$ sau $X^2+(m-1)X+1 = 0$

$$X_{2,3} = \frac{-(m-1) \pm \sqrt{(m-1)^2 - 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-(m-1) \pm \sqrt{m^2-2m-3}}{2}$$

E_4) Pt ca toate rădăc să fie reale trebuie ca

$m^2 - 2m + 3 \geq 0$, $m^2 - 2m + 3 = 0 \Rightarrow$ $m = -1$ sau $m = 3$

E_5)

m		-1		3	
m^2-2m+3	+	0	−	0	+

$\Rightarrow \boxed{m \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)}$

Prof Ovidiu Bădescu

V123
III 1a)

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Calculați $f'(x)$

E1) Folosim $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

E2) $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot (x^2+x+1)' =$

$= \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ III 15)

Determinați ec. asimptotei spre ∞ la Gf

E_1) <u>as. orizontală</u>:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}\overset{\sqrt{\infty}}{=\!=}\infty$$

$\Rightarrow$ Gf nu are as. orizontală spre ∞

E_2) <u>as. oblică</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}\overset{x>0}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$\Rightarrow m=1\in\mathbb{R}$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=\!=}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}$$

$$\overset{\frac{1+0}{1+1}}{=\!=}\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ec. asimptotei este $y=mx+n$

adică $y=x+\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

Găsiți intervalele de monotonie ale lui f

$E_1)$ $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(x^2+x+1)'=$

$=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$E_3)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		∞
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$\searrow$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{\frac{1-2+4}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow f\searrow$ pt $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ și

$f\nearrow$ pt $x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V123
III 2a)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

Calculați I_1

$E_1) I_1 = \int_0^1 (1-x) e^x dx$

$E_2)$ $f = 1-x \Rightarrow f' = -1$

$g' = e^x \Rightarrow g = \int e^x dx = e^x$

$I_1 = (1-x)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (-1)e^x dx =$

$= (0 \cdot e - 1 \cdot e^0) + \int_0^1 e^x dx$

$= -1 + e^x \Big|_0^1 = -1 + (e-1) = e-2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/123
II/26)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

Arătați că $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E1) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx$

E2) $f = (1-x)^{n+1} \Rightarrow f' = (n+1)(1-x)^n \cdot (-1)$

$g' = e^x \rightarrow g = \int e^x dx = e^x$

E3) $I_{n+1} = (1-x)^{n+1} e^x \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

$I_{n+1} = (0 \cdot e^1 - 1 \cdot e^0) + (n+1) \cdot I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$

Prof. Ovidiu Băescu

V123
III 20)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$. Dacă $I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$, arătați că:

$$I_n = n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{n!}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

E_1) inducție matematică.

$P(1)$: $I_1 = 1!\left(e - 1 - \frac{1}{1!}\right) = e - 1 - \frac{1}{1!} = e - 2$

$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$ $\quad f = 1-x \Rightarrow f' = -1$, $g' = e^x \Rightarrow g = e^x$

$\Rightarrow I_1 = (1-x)e^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx$

$= 0 - e^0 + e^x\Big|_0^1 = e - 2$

Π P_1. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $P(k+1)$ adev. unde

$P(k)$: $I_k = k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{k!}\right)$

$P(k+1)$: $I_{k+1} = (k+1)!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(k+1)!}\right)$.

Știm că $I_{k+1} = (k+1) I_k - 1 \overset{P(k)}{=\!=}$

$I_{k+1} = (k+1)\left[k!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{k!}\right)\right] - 1$

$= (k+1)!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{k!}\right) - \frac{(k+1)!}{(k+1)!}$

$= (k+1)!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \Rightarrow P(k+1)$ adev. $\Rightarrow P(n)$ adev.

Prof. Ovidiu Bădescu