Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2+x+1\right)=\log_5(x+2)$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10% prețul unui produs este 90 de lei. Calculați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y=x-1$ și punctul $A(2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este paralelă cu h.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătați că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_2^3\frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(1)=-1$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_2^e\frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Arătați că $a = 3(2+5i) - 5(1+3i)$ este real

$E_1)$ $a = 6+15i - (5+15i)$

$a = 6+15i - 5 - 15i$

$E_2 /$ $a = 1 \in \mathbb{R}$ deci $b = 0$

Găsiți coord punctului de ∩ cu Ox pentru Gf, $f(x) = x^2 + 10x + 25$

E_1) $\cap Ox: y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{10 \pm 0}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = -5 \\ x_2 = \frac{10}{2} = -5 \end{cases}$

E_3) $x_1 = -5 \Rightarrow y_1 = f(-5) = 25 - 50 + 25 = 0$

E_4) $M(-5; 0)$

Obs.: Deoarece punctul e la ∩ cu Ox putem direct $y = 0$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_5(x^2+x+1) = \log_5(x+2)$$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x^2+x+1>0 \\ x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x\in(-2,\infty) \end{cases}$

Dacă apar condiții complicate, ele pot să nu fie rezolvate dar soluția se verifică în ecuația inițială și se alege doar cea corectă

E_2) baza este comună, $b=5$

$$\Rightarrow x^2+x+1 = x+2 \Rightarrow x^2+x+1-x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{0\pm\sqrt{0^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1} = \frac{\pm 2}{2} = \pm 1 \text{ sol. posibile}$$

(se putea și $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$)

E_3) $x_1=1$ în ec $\Rightarrow \log_5(1+1+1) = \log_5(1+2)$

ader $\Rightarrow x_1=1$ soluție $\qquad S_f=\{\pm 1\}$

$x_2=-1$ în ec. $\Rightarrow \log_5(1-1+1) = \log_5 1$ ader.

După o ieftinire cu 10%, prețul unui produs este 90 lei. Calculați prețul înainte de ieftinire

---

E_1) Prețul inițial cu x

$\Rightarrow$ după ieftinire cu 10% el va fi

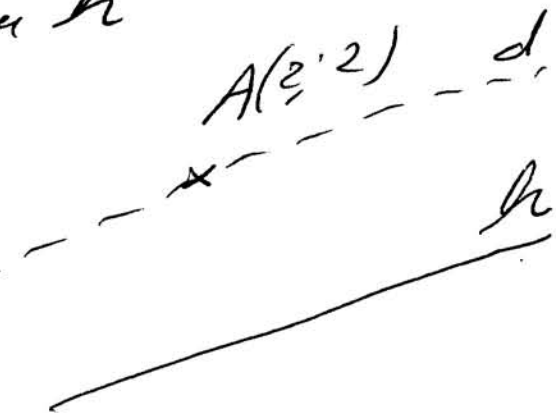
$$x - \frac{10}{100}x$$

E_2) Din enunț $\Rightarrow x - \frac{10}{100}x = 90$

$$x - \frac{1}{10}x = 90 \mid \cdot 10 \Rightarrow 10x - x = 900$$

$$9x = 900 \Rightarrow x = 100$$

Fie dreapta h de ecuație $y = x - 1$ și $A(2,2)$. Se cere ec. dreptei ce trece prin A și este paralelă cu h



$E_1)$ $h: y = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h: x - y - 1 = 0$

$E_2)$ notăm cu d dreapta ce trece prin A și este paralelă cu h

$E_3)$ $d \parallel h \Rightarrow m_d = m_h$

$E_4)$ $m_h = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-1} = 1$ $\Rightarrow m_d = 1$

$E_5)$ știm $A(2,2)$ știm $m_d = 1$

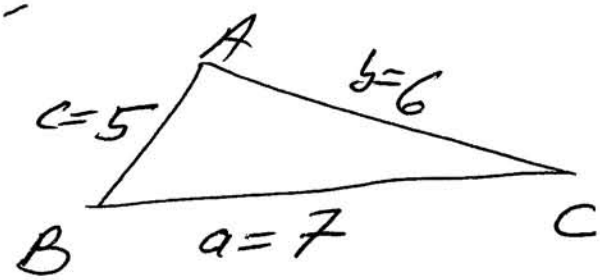
$\Rightarrow$ ec. d: $y - y_1 = m_d(x - x_1)$

$\Rightarrow y - 2 = 1(x - 2)$

$y - x = x - x \Rightarrow y = x$

$\Rightarrow x - y = 0$

Se cere $\cos A = ?$ dacă $\triangle ABC$ de laturi $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 7$



E_1) T. cosinusului în $\triangle ABC$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

E_2) $49 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos A$

$$49 = 61 - 60\cos A$$

$$60\cos A = 61 - 49$$

$$60\cos A = 12 \Rightarrow \cos A = \frac{12}{60} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(2)+A(6)=2A(4)$

E1) $A(2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A(6)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A(4)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

E2) $A(2)+A(6)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (1)

E3) $2A(4)=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (2)

E4) Din (1)+(2) $\Rightarrow A(2)+A(6)=2A(4)$

M2

V125 ☐ 16

Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Găsiți x pentru care $\det A(x) = 0$

$E_1)$ $\det A(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - x - (1 - 1 + x)$

$E_2)$ $\det A(x) = 2 - x - x = 2 - 2x$

$E_3)$ $\det A(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0$

$\Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow 2x = 2$

$\Rightarrow x = 1$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculați inversa lui $A(2)$

$E_1)\ A(2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)\ \det(A(2))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+1+0-0-2+1=$
$=1\neq 0\Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_3)\ A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)\ a^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(1+1)=2$

$a^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot(1-0)=-1$

$a^*_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(1-0)=1$

$a^*_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot(2-1)=-1$

analog celelalte $\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$E_5)\ A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Fie $f = X^3 + X^2 + mX + m$, arătați că f este divizibil cu $X+1$, $\forall m \in \mathbb{R}$ V/125 II 29)

E_1) Folosim teoria

$f \vdots (X-a) \Leftrightarrow f(a) = 0$ și

$f \vdots (X+a) \Leftrightarrow f(-a) = 0$

E_2) în cazul nostru, $f \vdots (X+1) \Leftrightarrow f(-1) = 0$

E_3) $f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^3 + (-1)^2 + m \cdot (-1) + m = 0$

$\Rightarrow -1 + 1 - m + m = 0$ adev.

Fie $f = X^3 + X^2 + mX + m$, determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

E_1) Folosim că

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$$

în $\Rightarrow (S_1)^2 - 2S_2 = 11$

E_2) Din VIETE, $S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m$$

E_3) $(S_1)^2 - 2S_2 = 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^2 - 2 \cdot m = 11 \Rightarrow 1 - 2m = 11$

$\Rightarrow -2m = 10 \Rightarrow m = \frac{10}{-2} = -5$

Fie $f = X^3 + X^2 + mX + m$, determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $|x_1| = |x_2| = |x_3|$ V125 II 2c)

E1) fiind de gr 3, încercăm Horner

	X^3	X^2	X	X^0
	1	1	m	m
1	1	2	$2+m$	$2+2m$
-1	1	0	m	$\boxed{0}$

$\Rightarrow f = (X+1)(X^2 + 0 \cdot X + m)$

$\Rightarrow f = (X+1)(X^2 + m)$

E2) pt a găsi rădăcinile $\Rightarrow (X+1)(X^2+m) = 0$

$\Rightarrow$ $X+1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$X^2 + m = 0 \Rightarrow X^2 = -m \Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{-m}$

E3) $|x_1| = 1$ și cum $|x_2| = |x_3| \Rightarrow |x_2| = |x_3| = 1$

$\Rightarrow |\sqrt{-m}| = |-\sqrt{-m}| = 1$

Deoarece $\sqrt{\ }$ e pozitiv $\Rightarrow \sqrt{-m} = 1 \Rightarrow -m = 1$

$\Rightarrow \boxed{m = -1}$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$ V125

Calculați $f'(x)$ II 1.a)

$E_1)$ $f'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$. V12 III 16,
Determinați ecuația tangentei la G_f în $x_0=1$

E_1) Ec. tg la G_f în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E_2) în cazul nostru, $\alpha=1$

$$\Rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E_3) $f(1)=1-\ln 1=1-0=1$

E_4) Nu a găsi $f'(1)$, calculăm $f'(x)$, apoi înlocuim pe x cu 1

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=1-1=0$$

E_5) ec. tg: $y-1=0(x-1)$

$$\Rightarrow y-1=0\Rightarrow y=1$$

V125
III 1c)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$

Arătați că $x\geq \ln x+1, \forall x\in(0;\infty)$

E_1) De aici inegalitățile cerute la concluzie se deduc din tabelul de variație al funcției

E_2) $f'(x)=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

E_3) $f'(x)=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

E_4)

x	$(0$		1	
f'	///	$-$	0	$+$
f	///	$\searrow$	1	$\nearrow$

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$, calc. în valori

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1<0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(x)<0, \forall x\in(0;1)\Rightarrow f\searrow$ pe $(0;1)$

$$f'(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in(1;\infty)\Rightarrow f\nearrow$ pe $(1;\infty)$

$\Rightarrow f(1)=1-\ln 1=1$

E_5) Din tabel $\Rightarrow f(x)\geq 1\Rightarrow x-\ln x\geq 1$

$\Rightarrow x\geq \ln x+1$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$

Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}\,dx=\frac{7}{2}$

$E_1)\ I=\int_2^3 \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}\,dx=\int_2^3 (x+1)\,dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+x\Big|_2^3=\frac{1}{2}(9-4)+(3-2)$

$=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x+1)(x-1)$

Determinați o primitivă $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției f știind că $F(1) = -1$

$E_1)$ F primitivă a $f \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$

$$\Rightarrow F(x) = \int x(x+1)(x-1)\,dx =$$

$$= \int x(x^2-1)\,dx = \int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$$

$E_2)$ Așadar, $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

$E_3)$ $F(1) = -1 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C = -1$

$$\Rightarrow C = -1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{1} = \frac{-4-1+2}{4} = -\frac{3}{4}$$

$E_4)$ $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}$

Fie $f(x)=x(x+1)(x-1)$, arătați că

$$\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}\,dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$$

$E_1)$ $I=\int_2^e \frac{x(x+1)(x-1)\ln x}{x^2-1}\,dx=\int_2^e \frac{x(x^2-1)\ln x}{x^2-1}\,dx$

$$=\int_2^e x\ln x\,dx$$

$E_2)$ prin părți, $f=\ln x \Rightarrow f'=\frac{1}{x}$

$$g'=x \Rightarrow g=\frac{x^2}{2}$$

$E_3)$ $I=\ln x\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^e-\int_2^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$

$$=\left(\ln e\cdot\left(\frac{e^2}{2}\right)-\ln 2\cdot\frac{4}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_2^e x\,dx$$

$$=1\cdot\frac{e^2}{2}-2\ln 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_2^e$$

$$=\frac{e^2}{2}-2\ln 2-\frac{1}{4}(e^2-4)=$$

$$=\frac{2e^2}{2}-2\ln 2-\frac{e^2}{4}+1=\frac{2e^2-e^2}{4}-2\ln 2+1=$$

$$=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$$