Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)$ este natural.

5p **2.** Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2+1\right)=\log_2 5$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20% prețul unui produs scade cu 200 de lei. Calculați prețul produsului după ieftinire.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuși.

5p **6.** Calculați lungimea medianei din A în triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x-y+2z=a \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$, unde a este un număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a știind că $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluție a sistemului.

5p **b)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **c)** Rezolvați sistemul pentru $a=-2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Pentru $a=-2$, calculați $f(2)$.

5p **b)** Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Arătați că, dacă polinomul f are o rădăcină întreagă, atunci a este multiplu de 6.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,4)$.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4 (x-1)f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_2^3 \left(x^3-1\right)f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuație $x=2$ și $x=3$, este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

M 2
V 12 4
I 11

Arătați că $\sqrt{8}-2(\sqrt{2}-3)$ este natural

$E_1)$ $N=\sqrt{8}-2\sqrt{2}+6$

$E_2)$ $N=\sqrt{4\cdot 2}-2\sqrt{2}+6$

$N=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6$

$N=6\in\mathbb{N}$

M2
V10 § I/2.1

Calculați $(f \circ f)(0)$ pentru

$f(x) = 3x + 1$

E1) $(f \circ f)(0) = f(f(0)) =$

$= f(3 \cdot 0 + 1) = f(1) =$

$= 3 \cdot 1 + 1 = 4$

TEORIE: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se

x înlocuiește $g(x)$

Rezolvați: $\log_2(x^2+1) = \log_2 5$

VI 24
3/3

E_1) Cond: $x^2+1>0$

Cum $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_C = \mathbb{R}$

E_2) $\log_2(x^2+1) = \log_2 5 \Rightarrow x^2+1=5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2 \in I_C$

E_3) $S: x \in \{\pm 2\}$

După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs scade cu 200 lei. Aflați prețul produsului după ieftinire

V124
I/4

E_1) Prețul produsului este x lei (preț inițial)

E_2) după ieftinire de 20% el scade cu 200 lei

$\Rightarrow \frac{20}{100} x = 200 \Rightarrow 2x = 2000 \Rightarrow x = 1000$

E_3) Dar, 1000 preț inițial, scade cu 200 lei

$\Rightarrow 1000 - 200 = 800$ preț final după ieftinire

Determinați $a \in \mathbb{R}$ pt care $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt opuși unde $\vec{u} = (-a-1)\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$

V124
I 5

$E_1)$ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ opuși $\Leftrightarrow \vec{u} = -\vec{v}$

$E_2)$ $\vec{u} = -\vec{v} \Leftrightarrow$

$(a-1)\vec{i} + 4\vec{j} = -(2\vec{i} - 4\vec{j})$

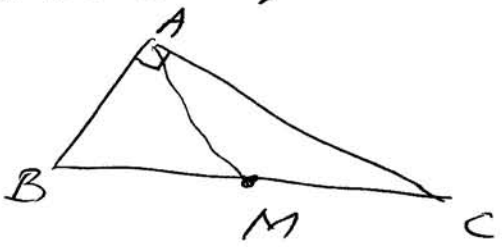
$\Leftrightarrow (a-1)\vec{i} + 4\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

$\Leftrightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

Calculați lungimea medianei din A a $\triangle ABC$ dreptunghic cu ipotenuza $BC=10$

VIII 5
I 6

E_1) <u>TEORIE</u>: $\triangle ABC$ dreptunghic în $A \Rightarrow$ mediana din A este jumătate din ipotenuză



$E_2) \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = \frac{10}{2}$

$\Rightarrow AM = 5$

V124
II 19).

Fie $\begin{cases} x-2y+2z=a \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$

Determinați a dacă $(x,y,z)=(1,2,1)$ este soluție a sistemului

---

E_1) $(1,2,1)$ soluție a sistemului $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1,\ y=2$ și $z=1$ verifică sistemul, deci înlocuite în sistem dau relații adev.

E_2) înlocuim $\Rightarrow \begin{cases} 1-4+2=a \\ 2-2=0 \\ 2-1=1 \end{cases}$

$\Rightarrow -1=a \Rightarrow a=-1$

V124
II 1b)

Fie $\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 2x - y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

Calculați determinantul sistemului

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+0+4-0-0-2$

$= 5-2=3$

V124
II 9c)

Fie sistemul $\begin{cases} x-y+2z=a \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$

Rezolvați sistemul dacă $a=-2$

$E_1)$ $a=-2 \Rightarrow$ sistemul devine $\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ 2x-y=0 \\ y-z=1 \end{cases}$

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+0+4-0-0-2 = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cramer

$E_3)$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+0+0+2-0-0=0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0+0+4-0-0-4=0$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-0-4-0-0+2=-3$

$E_4)$ $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{0}{3} = 0$; $y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{0}{3} = 0$

$z = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{-3}{3} = -1$

V124
II 1 a)

Fie $f = X^3 - X + a$. Dacă $a = -2$, calculați $f(2)$

$E_1)$ $a = -2 \Rightarrow f = X^3 - X - 2$

$E_2)$ $f(2) = 8 - 2 - 2 = 4$

V124

II 26)

Fie $f = X^3 - X + a$. Aratati ca

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$

$E_1)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

$E_2)$ Din VIETE, $f = X^3 - 0 \cdot X^2 - 1 \cdot X + a$

$$S_1 = -\frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

$E_3)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = 0 - 2 \cdot (-1) = 2$

V126
II 1c)

Fie $f = X^3 - X + a$, arătați că dacă f are o rădăcină întreagă $\Rightarrow a$ este multiplu de 6

E_1) f are o rădăcină întreagă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x = \alpha$ rădăcină a lui $f \Rightarrow f(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha^3 - \alpha + a = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) + a = 0$

$\Rightarrow \alpha(\alpha - 1)(\alpha + 1) + a = 0$

$\Rightarrow a = -(\alpha - 1)\alpha(\alpha + 1)$

E_2) Deoarece $\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha - 1$, α și $\alpha + 1$ sunt trei numere întregi consecutive $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\alpha - 1)\alpha(\alpha + 1) \vdots 3$

$\Rightarrow -(\alpha - 1)\alpha(\alpha + 1) \vdots 3$

$\Rightarrow a \vdots 3$

V129
III 19)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$

Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$

E1) $f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}$

$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{-2+x}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$

V/124
III 16)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$

Determinați pct de extrem pt f

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}$

$E_2)$ $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\overset{x}{=}\frac{-2+x}{x^2}$

$E_3)$ $f'(x)=0\Rightarrow -2+x=0\Rightarrow x=2$

$E_4)$

x	$(0$		2	
f'	//	$-$	0	$+$
f	//	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(1)=\frac{-2+1}{1}=-1<0\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(0,2)\Rightarrow f\searrow$

$f'(3)=\frac{-2+3}{9}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(2,\infty)\Rightarrow f\nearrow$

$E_5)\Rightarrow x=2$ pct de minim

V124
III 1c)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$

Arătați că f convexă pe $(0,4)$

E1) $f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=-\frac{2}{x^2}+\frac{x}{x^2}$

E2) $f''(x)=\frac{-2+x}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$

E3) $f''(x)=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)'=\frac{(x-2)'x^2-(x-2)(x^2)'}{(x^2)^2}$

$$f''(x)=\frac{1\cdot x^2-(x-2)\cdot 2x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x^2+4x}{x^4}=\frac{-x^2+4x}{x^4}$$

E4) $f''(x)=0\Rightarrow -x^2+4x=0\Rightarrow x(-x+4)=0$

$\Rightarrow$ $x_1=0$ sau $-x+4=0\Rightarrow x_2=4$

E5)

x	$(0$		4
f''	0	$+$ $+$	0
f'			
f		$\cup$	

$f''(1)=\frac{-1+4}{\cdot}>0\Rightarrow f''(x)>0$ pe $(0,4)\Rightarrow f$ convexă pe $(0,4)$

V12
II 2a)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$

Arătați că $\int_2^4 (x-1)\,f(x)\,dx=\ln\frac{5}{3}$

E1) $I=\int_2^4 (x-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\,dx=\int_2^4 \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}\,dx$

$=\int_2^4 \frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x+1|\Big|_2^4$

E2) $I=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$

V12 4
IV 28)

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, calculați

$$I=\int_2^3 (x^3-1)f(x)dx$$

$E_1)$ $I=\int_2^3 (x^3-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}dx=\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}dx$

$$=\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$$

$E_2)$ $\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x \\ \hline \quad\quad 1 & \end{array}$ $\Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1}=x+\frac{1}{x+1}$

$E_3)$ $I=\int_2^3 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+\ln|x+1|\Big|_2^3=$

$$=\frac{1}{2}(9-4)+(\ln 4-\ln 3)$$

$$=\frac{5}{2}+\ln\frac{4}{3}$$

V124

II 2c)

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, arătați că aria dintre G_f, axa Ox și $x=2$, $x=3$ este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$E_1)$ $A=\int_2^3 |f(x)|dx=\int_2^3 \left|\frac{1}{x^2-1}\right|dx$

$E_2)$ Pt a găsi semnul lui x^2-1 găsim rădăcinile: $x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Pt $x\in[2,3]\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow \frac{1}{x^2-1}>0$

$E_3)$ $A=\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_2^3$

$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{3}}=$

$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{4_2}\cdot\frac{3}{1}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$