Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x+1}=16$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,15\}$, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

V122
I/1

Arătați că numărul

$N = 2(\sqrt{7}+1)-\sqrt{28}$ este natural

E) $N = 2\sqrt{7}+2-\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7}+2-\sqrt{28}$

$N = \sqrt{28}+2-\sqrt{28}$

$N = 2$

Calculați $f(1)+f(2)+\dots+f(10)$
pentru $f(x)=2x-1$

$E_1)$ $f(1)=2\cdot 1-1=1$

$f(2)=2\cdot 2-1=3$

$f(3)=2\cdot 3-1=5$

- - - - - - - -

$f(10)=2\cdot 10-1=19$

$E_2)$ $S=(1+3+5+\dots+19)$

$\Rightarrow S=1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$

$\Rightarrow S=20+20+20+20+20$

$\Rightarrow S=100$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$4^{x+1} = 16$

E_1 / Deoarece $16 = 4^2 \Rightarrow$ ecuația

$4^{x+1} = 4^2 \Rightarrow x+1 = 2 \Rightarrow x = 1$

1/12 2
7/4

Se cere probabilitatea ca alegând un element din $A=\{1,2,3,\dots,15\}$, acesta să fie multiplu de 7

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

$E_2)$ nr. cazuri posibile : nr. de elemente din A

$\Rightarrow 15$ elemente

$E_3)$ nr. cazuri favorabile : nr. de elemente din A

$\vdots 7$, acestea sunt 7 și $14 \Rightarrow 2$ elemente

$E_4)$ $P=\dfrac{2}{15}$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j}$, să se afle lung. vectorului $\overrightarrow{AC}$

V122
I/5

$E_1)$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$

$E_2)$ Dacă $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j}$

$\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \Rightarrow$ în cazul nostru

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

Găsiți $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ dacă

$$\frac{3\sin x - 2\cos x}{\cos x} = 1$$

$E_1)$ Din $\frac{3\sin x - 2\cos x}{\cos x} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sin x - 2\cos x = \cos x$

$\Rightarrow 3\sin x = 3\cos x \mid : 3$

$\Rightarrow \sin x = \cos x \mid : \cos x$

$E_2) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ x \in (0; \frac{\pi}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

V/122
II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$

Calculați $\det A(2)$

$E_1)$ $A(2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det A(2)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$

$= 1+8+8-4-4-4=$

$= 17-12=5$

Vrea 2
II 1b)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, arătați că

$$A(1)\cdot A(2)=5\cdot A(1)$$

E1) $A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1+2+2 & 2+1+2 & 2+2+1 \\ 1+2+2 & 2+1+2 & 2+2+1 \\ 1+2+2 & 2+1+2 & 2+2+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

E2) $5\cdot A(1)=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ (2)

E3) Din (1)+(2) $\Rightarrow$ egalit.

V/22

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A(x))=0$

$E_1)$ $\det A(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}=(1+x^3+x^3)$

$-x^2-x^2-x^2=1+2x^3-3x^2=2x^3-3x^2+1$

$E_2)$ $\det A(x)=0 \Rightarrow 2x^3-3x^2+1=0$

$E_3)$ Horner

	x^3	x^2	x	x^0
	2	−3	0	1
1	2	−1	−1	0

$\Rightarrow (x-1)(2x^2-x-1)=0$

$\Rightarrow$ $x-1=0 \Rightarrow x=1$ sau $2x^2-x-1=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}<\begin{matrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}$

$E_4)$ $S_f: x\in\{-\frac{1}{2};1\}$

V122
II 2a)

Fie $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$. Dacă $m = 3$, calculați $f(1)$

$E_1)$ $m = 3 \Rightarrow f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3$

$E_2)$ $f(1) = 1 - 2 - 2 + 3 \Rightarrow f(1) = 0$

V122
II 26)

Fie $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$, găsiți $m \in \mathbb{R}$ a.î. care restul lui f la $X-2$ este egal cu 2

E_1) restul lui $f : (X-a)$ este $f(a)$

E_2) restul lui $f : (X-2)$ este $2 \Rightarrow f(2) = 2$

$\Rightarrow 8 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + m = 2$

$\Rightarrow \cancel{8} - \cancel{8} - 4 + m = 2 \Rightarrow \boxed{m = 6}$

VI 22

Fie $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$. Pentru $m = 4$ II 2c)

arătați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1$

E_1) Din VIETE, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

E_2) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3}$

E_3) Din VIETE $\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = S_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

și $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = \frac{m}{1} = m$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{-2}{m}$

E_4) Relația din enunț $\Leftrightarrow 2 \cdot \left(-\frac{2}{m}\right) = 1$

$\Rightarrow -\frac{4}{m} = 1 \Rightarrow m = -4$

V122

III 9a)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\ln x$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=(x\cdot\ln x)'=x'\ln x+x\cdot(\ln x)'=$

$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(x)=\ln x+1$

V122
III 15)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x\ln x$

Calculati $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\ \dfrac{\infty}{\infty}$ l'H

E2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{\infty}=0$

V122

III 1c)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$

Arătați că f convexă pe $(0;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x\cdot(\ln x)'=$

$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

$E_2)$ $f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}+0$

$E_3)$ $x\in(0;\infty)\Rightarrow\frac{1}{x}>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ convexă

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, arătați că $\int_0^1 x f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2$ III 2a)

E1) $I=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ $\begin{matrix}grp=1\\ grq=2\end{matrix}$

E2) formăm la numărător derivata de la numitor

E3) $I=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=$

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{0})=\frac{1}{2}\ln 2$

Fie $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — II/26)

Calculați $\int_0^1 x f'(x)\,dx$

E1) Folosim metoda integrării prin părți

$\Rightarrow \quad f = x \quad \Rightarrow f' = 1$

$g' = f'(x) \Rightarrow g = f(x)$

E2) $I = x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot f(x)\,dx =$

$= x \cdot \frac{1}{x^2+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= \frac{1}{2} - \frac{0}{1} - \frac{1}{1}\operatorname{arctg}\frac{x}{1}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{2} - (\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4} - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0})$

$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

V122

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, calculați volumul (II 2 C)
corpului generat de $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$

E1) $I=\pi\int_0^1 h^2(x)\,dx=$

$=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 dx=\pi\int_0^1(x^2+1)^2\,dx$

E2) $I=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)\,dx=$

$=\pi\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1+2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+x\Big|_0^1\right)=$

$=\pi\left(\frac{1}{5}-0+\frac{2}{3}-0+1-0\right)=$

$=\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right)$

$=\pi\cdot\frac{3+10+15}{15}=\frac{28\pi}{15}$