**Examenul de bacalaureat naţional 2013**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 2**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I

**(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătaţi că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.

**5p** **2.** Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+1}=x+1$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.

**5p** **5.** Se consideră punctele $A$, $B$ şi $C$ astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

**5p** **6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde $x$ este număr real. Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

## SUBIECTUL al II-lea

**(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\det A$.

**5p** **b)** Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.

**5p** **c)** Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

**5p** **a)** Calculaţi $2*2$.

**5p** **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{12}$.

**5p** **c)** Arătaţi că numărul $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1\text{ de }8\text{ ori}}$ este întreg.

## SUBIECTUL al III-lea

**(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei $f$.

**2.** Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

**5p** **a)** Calculaţi $\int_0^1(x+1)f(x)\,dx$.

**5p** **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x)\,dx+\int_0^1 x^3f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

**5p** **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $Ox$ a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

V121
I11

Arătați că $x \in \mathbb{R}$ unde

$$x = 2(1+i) - 2i$$

---

$E_1)$ $x = 2(1+i) - 2i$

$\Rightarrow x = 2 + 2i - 2i \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R}$

VII° 1/2

Fie $f(x) = x - 2$, calculați

$$f(1) \cdot f(2) \cdots f(5)$$

---

$E_1)$ $f(1) = 1 - 2 = -1$

$f(2) = 2 - 2 = 0$

$f(3) = 3 - 2 = 1$

$f(4) = 4 - 2 = 2$

$f(5) = 5 - 2 = 3$

$E_2)$ $P = f(1) \cdot f(2) \cdots f(5) = -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2+1} = x+1$$

---

$E_1$) Rezolvăm ec. iar soluțiile le verificăm în ec. inițială, fără a pune condiții

$E_2$) $\sqrt{x^2+1} = x+1 \mid (\,)^2$

$$x^2+1 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+1 = x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow 1 = 2x+1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

soluție posibilă

$E_3$) o verificăm în ec. inițială

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{0^2+1} = 0+1$$

$$1 = 1 \text{ adev}$$

$\Rightarrow x = 0$ soluție

V 120
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un n. de 2 cifre, produsul cifrelor sale să fie 5

E1) $P = \frac{\text{n. caz favorabile}}{\text{n. caz posibile}}$

E2) n. caz posibile: toate n. de 2 cifre de forma $\overline{ab}$ → a → 9 ✓
b → 10 ✓
independ

⇒ 90 numere

E3) n. caz favorabile: toate n. de 2 cifre de forma $\overline{ab}$ cu $a \cdot b = 5$

⇒ $\begin{cases} a=1, b=5 \\ \text{sau} \\ a=5, b=1 \end{cases}$ → 2 numere

E4) $P = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

Fie $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} + \vec{j}$, să se afle lungimea lui $\overrightarrow{AC}$

---

E1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j})$

$\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

E2) Folosim $|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Fie $E(x) = \sin x + \cos \frac{x}{2}$, calculați

$E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

---

$E_1)$ $E\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{\frac{4\pi}{3}}{2} = \sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{6}$

$E_2)$ Dar, $\frac{\pi}{3} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ și $\frac{\pi}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

$E_3)$ $E\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \underset{\text{tabel}}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, calculați $\det A$

V 12)
I 9a)

---

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5-6 = -1$

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, arătați că

$$A^2-6A=I_2$$

---

$E_1)\ A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot5\\ 3\cdot1+5\cdot3 & 3\cdot2+5\cdot5\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}7&12\\18&31\end{pmatrix}$$

$E_2)\ 6A=6\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&12\\18&30\end{pmatrix}$

$E_3)\ A^2-6A=\begin{pmatrix}7&12\\18&31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&12\\18&30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$

$$\Rightarrow A^2-6A=I_2$$

V/2
II/c)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$, determinați inversa lui $B=A-6I_2$

---

$E_1)$ $B=A-6I_2=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$

$E_2)$ $B=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$,

$E_3)$ $b_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot|-1|=1\cdot(-1)=-1$

$b_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot|2|=-2$

$b_{21}^*=(-1)^{2+1}\cdot|3|=-3$ $\Rightarrow B^*=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-5\end{pmatrix}$

$b_{22}^*=(-1)^{2+2}\cdot|-5|=-5$

$E_4)$ $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B^*$

$\det B=\begin{vmatrix}-5&2\\3&-1\end{vmatrix}=5-6=-1$

$\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-5\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$

VII 21
II 2a)

Fie $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$, calculați

$2 * 2$

$E_1)\ 2 * 2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4} = \sqrt{4+4+4} =$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

V/121
V. 6)

Fie $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ec.: $x * x = \sqrt{12}$

---

$E_1)$ $x * x = \sqrt{x^2 + x^2 + 4} = \sqrt{2x^2 + 4}$

$E_2)$ $x * x = 12 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 4} = \sqrt{12} \quad | \; ()^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 4 = 12 \Rightarrow 2x^2 = 8$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Fie $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$, arătați că

$\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{8 \text{ ori}}$ este întreg

---

$E_1)\ 1 * 1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4} = \sqrt{6}$

$E_2)\ (1 * 1) * 1 = \sqrt{6} * 1 = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2 + 4} = \sqrt{6 + 1 + 4} = \sqrt{11}$

$E_3)\ (1 * 1 * 1) * 1 = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 1^2 + 4} = \sqrt{16}$

$E_4)\ (1 * 1 * 1 * 1) * 1 = \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2 + 4} = \sqrt{21}$

Observăm că sub radicali avem progresie aritmetică cu $r = 5$ și $a_1 = 6$

Rd a ajunge la $\underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{8 \text{ ori}}$ $\Rightarrow$ trebuie al 7-lea termen deoarece primul termen este $1 * 1$

$\Rightarrow a_7 = a_1 + (7-1)r \Rightarrow a_7 = 6 + 6r =$

$= 6 + 30 = 36$

$\Rightarrow \underbrace{1 * 1 * \ldots * 1}_{8 \text{ ori}} = \sqrt{36} = 6$

Fie $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$, arătați că

$$f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$$

---

Ex. $f'(x)=(e^x(x^2-6x+9))'=$

$$=(e^x)'(x^2-6x+9)+e^x(x^2-6x+9)'=$$

$$=e^x(x^2-6x+9)+e^x(2x-6)$$

$$=e^x(x^2-6x+9+2x-6)$$

$$=e^x(x^2-4x+3)$$

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2-6x+9)$,
determinați punctele de extrem pt $f$

---

$E_1$) $f'(x) = (e^x(x^2-6x+9))' =$

$= (e^x)'(x^2-6x+9) + e^x(x^2-6x+9)' =$

$= e^x(x^2-6x+9) + e^x(2x-6) =$

$= e^x(x^2-6x+9+2x-6)$

$\Rightarrow f'(x) = e^x(x^2-4x+3)$

$E_2$) pt a găsi punctele de extrem rezolvăm

$f'(x) = 0 \Rightarrow$ $e^x = 0$ Fals
sau
$x^2-4x+3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 1}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow x \in \{1, 3\}$

$E_3$) pt ca aceste puncte să fie de extrem, $f'$ trebuie să își schimbe semnul în ele

| $x$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+ \quad +$ | $0$ | $- - - -$ | $0$ | $+ \quad +$ |
| $f$ | ↗ | | ↘ | | ↗ |

$\Rightarrow x=1$, $x=3$ pct de extrem

Fie $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$, verificați dacă $f(x)+f''(x)=2(f'(x)+e^x)$

---

$E_1)\ f'(x)=(e^x(x^2-6x+9))'=$

$=(e^x)'(x^2-6x+9)+e^x(x^2-6x+9)'=$

$=e^x(x^2-6x+9)+e^x(2x-6)=$

$=e^x(x^2-6x+9+2x-6)\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$

$E_2)\ f''(x)=(f'(x))'=(e^x(x^2-4x+3))'=$

$=(e^x)'(x^2-4x+3)+e^x(x^2-4x+3)'=$

$=e^x(x^2-4x+3)+e^x(2x-4)=$

$=e^x(x^2-4x+3+2x-4)\Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=e^x(x^2-2x-1)$

$E_3)$ Relația $f(x)+f''(x)=2(f'(x)+e^x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x(x^2-6x+9)+e^x(x^2-2x-1)=2(e^x(x^2-4x+3)+e^x)$

$\Leftrightarrow e^x(x^2-6x+9+x^2-2x-1)=2e^x(x^2-4x+3+1)$

$\Leftrightarrow 2x^2-8x+8=2(x^2-4x+4)$ adev.

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$, calculați

$$\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx$$

---

E1) $I=\int_0^1 (x+1)\cdot\frac{x}{x+1}\,dx=\int_0^1 x\,dx=$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$$

Fie $f(x)=\frac{x}{x+1}$, arătați că

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=\frac{1}{4}$$

---

$$I=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx+\int_0^1 x^3 f(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 \left(x^2 f(x)+x^3 f(x)\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x^2(x+1)\cdot f(x)\,dx$$

Dar, $f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow I=\int_0^1 x^2(x+1)\cdot\frac{x}{x+1}\,dx$

$$=\int_0^1 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{0}{4}=\frac{1}{4}$$

Calculați volumul generat de $G_h$ unde $h:[0;1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{x}{x+1}$

---

E1) $V=\pi\int_0^1 h^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx=$

$=\pi\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+1}\,dx$

E2) Fie $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+2x+1}\,dx=$

$=\int_0^1 \frac{x^2+2x+1-2x-1}{x^2+2x+1}\,dx=$

$=\int_0^1 \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1}-\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\,dx=$

$=\int_0^1 1\,dx-\int_0^1 \frac{2x+2-1}{x^2+2x+1}\,dx=$

$=x\Big|_0^1-\left(\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx-\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx\right)=$

$=1-0-\left(\ln|x^2+2x+1|\Big|_0^1-\int_0^1 (x+1)^{-2}\,dx\right)=$

$=1-\left(\ln 4-\underbrace{\ln 1}_{0}-\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\Big|_0^1\right)=$

$=1-\ln 4-\frac{1}{x+2}\Big|_0^1=1-\ln 4-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=$

$=1-\ln 4+\frac{1}{6}$