INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

VARIANTA 1

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013
Matematică *M_ŞTIINȚE ALE NATURII*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Calculați $\log_4 0,25$.
2. Găsiți punctele de intersecție dintre graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$ și dreapta de ecuație $2x+3y=5$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi următoarea inecuație $\frac{x+2}{4-x}\le -1$.
4. Determinați probabilitatea ca o funcție din cele definite pe $\{1;2\}$ cu valori în $\{1;2;3\}$ să fie strict crescătoare.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;4); B(m;1)$. Determinați parametrul m astfel încât panta dreptei AB să fie 4.
6. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(4;0), B(0;2), C(1;1)$, calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Fie sistemul : $\begin{cases} 3x+4y+2z=3 \\ 2x+y+3z=-3 \\ 5x+7y+2az=3 \end{cases}$ și matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2a \end{pmatrix}$.

   a) Calculați determinantul matricei A.
   b) Aflați valorile parametrului real a, pentru care matricea nu este inversabilă.
   c) Știind că $a=3$ aflați x, y, z.

2. Se consideră $M=(-2,2)$ și legea $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}, \forall x,y\in\mathbb{R}, xy\neq -4$ care este asociativă.

   a) Calculați $(-2)*1$.
   b) Determinați elementul neutru.
   c) Arătați că pentru orice $x, y\in M$ avem că $x*y\in M$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\ln(1+x)-2x$.

   a) Calculați $f'(0)$.
   b) Să se studieze monotonia funcției f.
   c) Să se arate că $\ln 2(1+x)-2x\le 1, (\forall)x>-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

   a) Să se calculeze $\int_{-1}^{0}(x-1)dx$.
   b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0}\frac{f(x)}{x-2}dx$.
   c) Să se calculeze aria dintre graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=1, x=2$.

V116
I/1

Calculați $\log_4 0{,}25$

$E_1)$ $\log_4 0{,}25 = \log_4 \frac{25}{100} = \log_4 \frac{1}{4}$

$E_2)$ $N = \log_4 4^{-1} = -1 \cdot \underbrace{\log_4 4}_{1} = -1$

VII 6
I/2

Găsiți punctele de intersecție dintre G_f, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$ și dreapta $2x+3y=5$

E_1) De fiecare dată când apare o funcție, ea poate fi înlocuită cu y

E_2) se cere pct de intersecție dintre

$y=4x-1$ și $2x+3y=5 \Rightarrow$ sistem

E_3) $\begin{cases} y=4x-1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$ înlocuim y în ec.(2)

$\Rightarrow 2x+3(4x-1)=5 \Rightarrow 2x+12x-3=5$

$\Rightarrow 14x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$

E_4) $y=4x-1 \Rightarrow y=4\cdot\frac{4}{7}-1=\frac{16}{7}-\frac{7}{1}=\frac{9}{7}$

$\Rightarrow M\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$

V116
I/3

Rezolvați în numere întregi:

$$\frac{x+2}{4-x} \leq -1$$

E_1) Cond.: $4-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

E_2) Ineq cu fracții se rezolvă cu tabel de semne, nu putem elimina numitorul

E_3) $\frac{x+2}{4-x} \leq -1 \Rightarrow \frac{x+2}{4-x} + 1 \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{x+2+4-x}{4-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{6}{4-x} \leq 0$$

E_4)

x				4			
6	+	+	+	+	+	+	+
$4-x$	+	+	+	+	0	−	−
$\frac{6}{4-x}$	+	+	+	+	∄	−	−

E_5) $\mathcal{A}$ ca $\frac{6}{4-x} \leq 0 \Rightarrow x \in (4, \infty)$

E_6) dar soluțiile $\in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in (4, \infty) \cap \mathbb{Z}$

$x \in \{5, 6, 7, \dots\}$

V116
I/4

Determinați probabilitatea ca alegând o funcție $f:\{1,2\}\to\{1,2,3\}$ să fie strict crescătoare

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>nr. cazuri posibile</u>: nr. total de f:

$f: A\to B$ este $(\text{card}B)^{\text{card}A} = 3^2 = 9$

$E_3)$ <u>nr. cazuri favorabile</u>: nr. de f

$f: A\to B$ este $A^{\text{card}A}_{\text{card}B} = A_3^2 =$

$$= \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$$

$E_4)$ $P = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

V116
I15

Fie $A(1;4)$, $B(m;1)$. Determinați m pentru care panta lui AB să fie 4

$E_1)$ $m_d = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{m-1}$

$\Rightarrow m_{AB} = \frac{-3}{m-1}$

$E_2)$ Dar, $m_d = 4 \Rightarrow \frac{-3}{m-1} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 = 4(m-1) \Rightarrow -3 = 4m - 4$

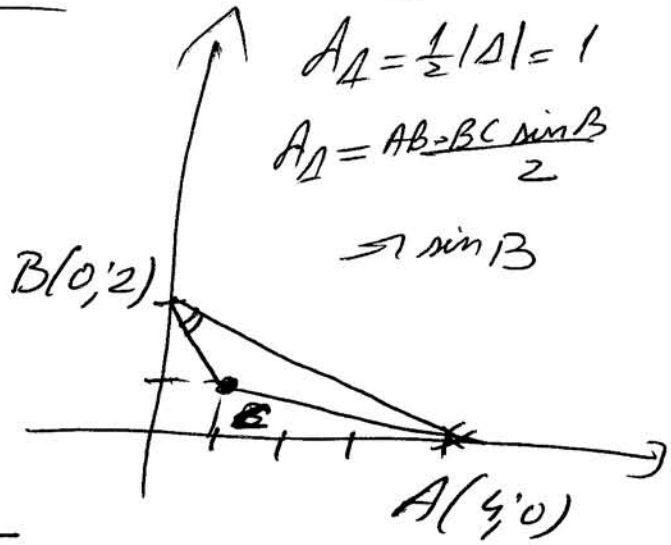
$\Rightarrow 1 = 4m \Rightarrow m = \frac{1}{4}$

V116
I/6

Fie $A(4;0)$, $B(0;2)$, $C(1;1)$.

Calculați $\sin B$

met II : (aria)



$A_\Delta = \frac{1}{2}|\Delta| = 1$

$A_\Delta = \frac{AB \cdot BC \sin B}{2}$

$\Rightarrow \sin B$

E1) T. cosinusului

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cdot \cos B$

E2) $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(1-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow AC^2 = 10$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} =$

$= \sqrt{2} \Rightarrow BC^2 = 2$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-4)^2 + (2-0)^2}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow AB^2 = 20$

E3) înlor în T cos.:

$10 = 20 + 2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cos B$ 3

$-12 = -4\sqrt{10} \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

E4) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100} \Rightarrow$

$\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$

V116
II 19)

Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2a \end{pmatrix}$.

Calculați $\det A$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2a \end{vmatrix} =$

$= 6a + 28 + 60 - 10 - 63 - 16a$

$= -10a + 88 - 73$

$= -10a + 15$

V116
II 16)

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2a \end{pmatrix}$.

Aflați valorile lui a pentru care A nu e inversabilă

$E_1)$ A nu e inversabilă $\Leftrightarrow \det A = 0$

$E_2) \det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 2a \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \det A = -10a + 15$

$E_3) \det A = 0 \Rightarrow -10a + 15 = 0$

$\Rightarrow -10a = -15$

$a = \frac{-15}{-10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

V116
II 1c)

Fie $\begin{cases} 3x+4y+2z=3 \\ 2x+y+3z=-3 \\ 5x+7y+2az=3 \end{cases}$

Dacă $a=3$, aflați x, y, z

E1) $a=3 \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y+2z=3 \\ 2x+y+3z=-3 \\ 5x+7y+6z=3 \end{cases}$

E2) $\det S = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 18+60+28- \\ -10-63-48$

$= 106-121 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ CRAMER

E3) $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 18+36-42- \\ -6-63+72 =$

$= 126-111 = 15$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$

E4) $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{15}{-5} = -3$; $y=$ $z=$

V116
II 2a)

Fie $M=(-2,2)$ și $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$

Se cere: $(-2)*1$

$E_1) (-2)*1=\frac{4\cdot(-2)+4\cdot 1}{4+(-2)\cdot 1}=$

$=\frac{-8+4}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2$

II 2b)

Fie $M=(-2,2)$ și $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$

Determinați el neutru

$E_1)$ $\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M \Rightarrow$

$$x*e=e*x=x$$

$E_2)$ $x*e=x \Rightarrow \frac{4x+4e}{4+xe}=x$

$$\Rightarrow 4x+4e=4x+x^2e$$

$$\Rightarrow 4e-x^2e=0$$

$$e(4-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} e=0\in M \\ \text{sau} \\ x^2=4 \Rightarrow \\ \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Fals, pt că $x\in(-2,2)$

$\Rightarrow e=0$

$E_3)$ arăt că $*$ comutativă

$\forall x,y\in M \Rightarrow x*y=y*x$

$$\frac{4x+4y}{4+xy}=\frac{4y+4x}{4+yx} \text{ adev.}$$

$\Rightarrow x*e=e*x \Rightarrow e=0$ el neutru

V/116
II 2c)

Fie $M=(-2,2)$ și $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$

Arătați că $\forall x,y\in M \Rightarrow x*y\in M$

E_1) Vrem să arătăm că $\forall x,y\in(-2,2)\Rightarrow x*y\in(-2,2)$

E_2) $x*y\in(-2,2) \Leftrightarrow -2<\frac{4x+4y}{4+xy}<2 \Big| \cdot(4+xy)>0$ pt că $x,y\in(-2,2)$

$\Leftrightarrow -2(4+xy)<4x+4y<2(4+xy) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(4+xy)<4(x+y) & |:2 \\ 4(x+y)<2(4+xy) & |:2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4-xy<2x+2y \\ 2x+2y<4+xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y+4+xy>0 \\ 4+xy-2x-2y>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)+y(2+x)>0 \\ 2(2-x)+y(x-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2)>0 \\ (2-x)(2-y)>0 \end{cases}$$

E_3) Dar, $x,y\in(-2,2) \Rightarrow -2<x<2$ și $-2<y<2$

$\Rightarrow x+2>0,\ y+2>0,\ 2-x>0,\ 2-y>0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)(y+2)>0 \\ (2-x)(2-y)>0 \end{cases}$$

E_4) Deoarece am folosit relații echivalente $\Rightarrow$

$\Rightarrow x*y\in(-2,2)$

V116

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)-2x$ III 1a)

Calculați $f'(0)$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\ln(1+x)-2x\right)'=$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'-2$$

$$=\frac{1}{1+x}-2$$

$E_2)$ $f'(0)=\frac{1}{1+0}-2=1-2=-1$

S-a folosit: $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$

V 116
III 96)

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)-2x$

Studiați monotonia lui f

$E_1)$ $f'(x)=\left(\ln(1+x)-2x\right)'=$

$=\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'-2=\frac{1}{1+x}-2=$

$=\frac{1-2-2x}{1+x}=\frac{-1-2x}{1+x}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow -1-2x=0\Rightarrow 2x=-1$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\in(-1,\infty)$

$E_3)$

x	$(-1$		$-1/2$	
f'	//	$+\;+\;+\;0$		$-\;-\;-\;-$
f	//	↗		↘

$E_4)$ $f_1\nearrow$ pt $x\in(-1,-1/2]$

$f_1\searrow$ pt $x\in[-1/2,\infty)$

Arătați că $\ln(2(1+x)) - 2x \leq 1, \forall x > -1$ V/16 III/1c)

unde $f: (-1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - 2x$

E_1) Faptul că ni se dă $f(x) = \ln(1+x) - 2x$ înseamnă că probabil relația cerută se obține din f

E_2) Facem tabel de variație pt f

$$f'(x) = \left(\ln(1+x) - 2x\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' - 2 =$$

$$= \frac{1}{1+x} - 2 = \frac{1-2-2x}{1+x} = \frac{-1-2x}{1+x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -1-2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \in D_f$$

E_3)

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nexists$	$\nearrow$	$-\ln 2 + 1$	$\searrow$

Pt a găsi semnul lui $f'(x)$ am dat valori

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \ln\left(1-\tfrac{1}{2}\right) - 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \ln\tfrac{1}{2} + 1$$

$$= \ln 2^{-1} + 1 = -\ln 2 + 1$$

E_4) Din tabel $\Rightarrow f(x) \leq -\ln 2 + 1$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - 2x \leq -\ln 2 + 1$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) + \ln 2 - 2x \leq 1 \Rightarrow \ln(2(1+x)) - 2x \leq 1, \quad \forall x > -1$$

Calculați $\int_{-1}^{0} (x-1)\,dx$

VII
III 2a

E1) $\int_{-1}^{0} (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - x\Big|_{-1}^{0} =$

$= \left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) - (0-(-1)) =$

$= -\frac{1}{2} - \frac{2}{1} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}$

V116
III 2 b)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$

Calculați $\int_{-1}^{0}\frac{f(x)}{x-2}dx$

$E_1) I=\int_{-1}^{0}\frac{x^2-3x+2}{x-2}dx$

$E_2)$ descomp factori pe x^2-3x+2

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$

și folosim $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$E_3) I=\int_{-1}^{0}\frac{1(x-2)(x-1)}{x-2}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x-1)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}-x\Big|_{-1}^{0}$

$=\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)-(0-(-1))=$

$=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

V116

Fie $f(x)=x^2-3x+2$. Calculați III 2c)
aria dintre G_f, axa Ox și dreptele
$x=1$ și $x=2$

$E_1)\ A=\int_a^b |f(x)|\,dx$

$E_2)$ în cazul nostru, $A=\int_1^2 |x^2-3x+2|\,dx$

$E_3)$ semnul lui x^2-3x+2

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

din tabel, $x\in[1;2]\Rightarrow$

$$x^2-3x+2\le 0$$

$E_4)\ A=\int_1^2(-x^2+3x-2)\,dx=$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-2\cdot x\Big|_1^2=$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}(4-1)-2(2-1)=\dots$$