Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-2x-m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5p **5.** Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$, știind că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ calculați $2011\circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=-1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x\circ 2^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\dfrac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

M3/BAC2015/MODEL/I 1 4115

Se cere ~~suma~~ modulul primilor trei termeni ai unei progr aritmetice, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$

$E_1)$ $a_n = a_1 + (n-1)r$

$E_2)$ $a_2 = a_1 + (2-1)r \Rightarrow 1 = 2 + r \Rightarrow r = -1$

$E_3)$ $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 2 + 2 \cdot (-1)$

$a_3 = 2 - 2 = 0$

$E_4)$ $P = a_1 a_2 a_3 = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă

$$x^2 - 2x - m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

E_1) Folosim $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

E_2) în cazul nostru, $x^2 - 2x - m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

E_3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) < 0$

$$\Rightarrow 4 + 4m < 0 \Rightarrow 4m < -4$$

$$\Rightarrow m < -1 \Rightarrow m \in (-\infty, -1)$$

M2/BAC 2018/ model / T 3

Rezolvați: $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$

$E_1)$ Cond.: $\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty) = I_1 \\ x-1 > 0 \Rightarrow x \in (1;\infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = (1;\infty)$

$E_2)$ Ecuația: $\log_2 (x(x-1)) = \log_2 12$

$\Rightarrow x(x-1) = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$E_3)$ $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$ $\begin{matrix} 4 \in I_C \\ \not\in -3 \not\in I_C \end{matrix}$

$E_4)$ S_f : $x = 4$

V115

Nr 2, BAC 2015 model, S1

Care este probabilitatea ca alegând un nr. de 3 cifre, modulul cifrelor să fie egal cu 3

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : toate nr. de 3 cifre

$N = \overline{abc}$, $a \to 9V$, $b \to 10V$, $c \to 10V$, independ

$9 \cdot 10^2 = 900$

$E_3)$ nr. caz favorabile : $\overline{abc}$ cu $a \cdot b \cdot c = 3$

Caz I: $a = 3, b = 1, c = 1 \Rightarrow 311$

Caz II: $b = 3, a = 1, c = 1 \Rightarrow 131$

Caz III: $c = 3, a = 1, b = 1 \Rightarrow 113$

$\Rightarrow$ 3 favorabile

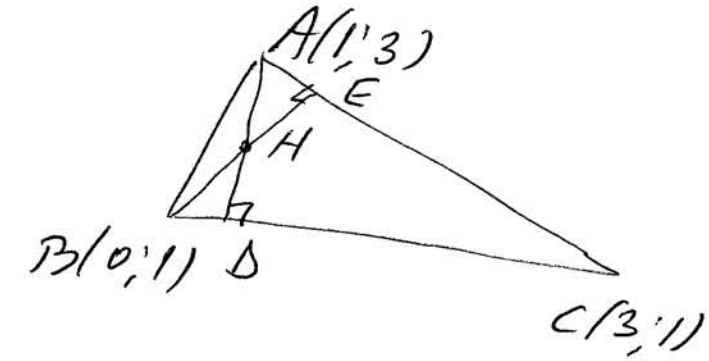
$E_4)$ $P = \dfrac{3}{900} = \dfrac{1}{300}$

Se cere: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$ dacă $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și $m(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$

$E_1)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$E_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

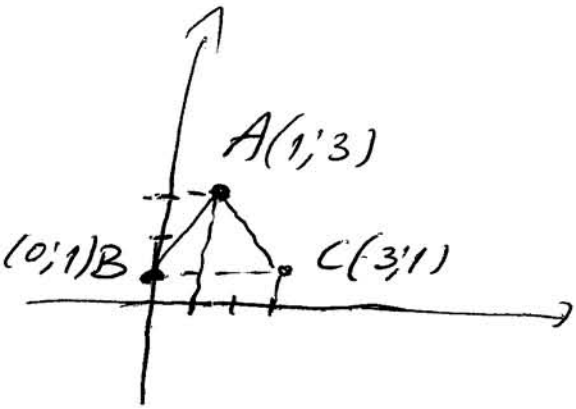
Fie $A(1;3)$, $B(0;1)$, $C(3;1)$. Găsiți coordonatele ortocentrului $\triangle ABC$



E_1) Ortocentrul este $\cap$ înălțimilor $\triangle ABC$

E_2) $AD \perp BC \Rightarrow m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

E_3) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-1}{3-0} = 0$



și înlocuim în $m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

$\Rightarrow 0 \cdot m_{BC} = -1$, contradicție $\Rightarrow \nexists m_{BC}$ și pe o figură exactă $\Rightarrow$ înălț. din A are ec.: $\boxed{x = 1}$

E_4) $BE \perp AC \Rightarrow m_{BE} \cdot m_{AC} = -1$

E_5) $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-3}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow m_{BE} = 1$

$\Rightarrow$ ec. BE: $y - y_B = m_{BE}(x - x_B) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 1 = 1(x-0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow \boxed{x - y + 1 = 0}$

E_6) intersecția celor 2 înălțimi

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow H(1;2)$$

VMS
II 19)

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculați suma elementelor lui A

$E_1)$ $S=(0+0+1)+(2n+1+n+1)+(2n^2+1+n^2+1)$

$S=1+(3n+2)+(3n^2+2)$

$S=3n^2+3n+5$

VII 5
I 16)

Fie $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$

Găsiți $n\in\mathbb{N}$ a.î. $\det A\neq 0$

$E_1)\ \det A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{vmatrix}=$

$=0+(2n+1)n^2+0-(2n^2+1)n-0-0=$

$=2n^3+n^2-2n^3-n$

$=n^2-n$

$E_2)$ Dacă $\det A=0\Rightarrow n^2-n=0\Rightarrow$

$\Rightarrow n(n-1)=0\Rightarrow n\in\{0;1\}$

$E_3)$ n.c.r. $\det A\neq 0\Rightarrow n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

VMS

Fie $A_n(2n+1, n)$, determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dacă $\mathcal{A}_{OA_n A_{n^2}} = n^2 - 3$ (III 1c)

$E_1)$ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

$E_2)$ $O(0;0)$, $A_n(2n+1, n)$, $A_{n^2}(2n^2+1, n^2)$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + (2n+1)n^2 + 0 - (2n^2+1)n - 0 - 0 =$$

$$= 2n^3 + n^2 - 2n^3 - n = n^2 - n$$

$E_3)$ $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|n^2 - n|$ $\Rightarrow \frac{1}{2}|n^2-n| = n^2 - 3$

Dar, $\mathcal{A} = n^2 - 3$ $\Rightarrow |n^2 - n| = 2n^2 - 6$

$E_4)$ $n \geq 2 \Rightarrow n^2 - n > 0 \Rightarrow n^2 - n = 2n^2 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}{}^{2}$ $\quad -3 < 0$

$\Rightarrow \boxed{n = 2}$

Fie $x \circ y = x + y + 1$, calculați

$2011 \circ 2012$

$E_1) \; 2011 \circ 2012 = \overline{2011 + 2012 + 1} =$

$= 2012 + 2012 = 4024$

Fie $x \circ y = x + ay + 1$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $\circ$ asociativă

E_1) $\circ$ asociativă $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ avem

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

E_2) $(x \circ y) \circ z = (x + ay + 1) \circ z =$

$$= (x + ay + 1) + az + 1 =$$

$$= x + ay + az + 2 \qquad (1)$$

E_3) $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + az + 1) =$

$$= x + a(y + az + 1) + 1 =$$

$$= x + ay + a^2 z + a + 1 \qquad (2)$$

E_4) Din (1) + (2) $\Rightarrow$

$$x + ay + az + 2 = x + ay + a^2 z + a + 1, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ egalăm coeficienții $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = a \\ a = a^2 \\ 2 = a + 1 \Rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases} \Rightarrow a \in \{0; 1\} \Rightarrow \text{sol comună } \boxed{a = 1}$$

Fie $x \circ y = x - y + 1$, rezolvați în $\mathbb{R}$ VMS 2001

$$4^x \circ 2^x = 1$$

$E_1)$ $4^x \circ 2^x = 1 \Rightarrow 4^x - 2^x + 1 = 1$

$$\Rightarrow 4^x - 2^x = 0$$

$E_2)$ not. $2^x = t \Rightarrow 4^x = t^2 \Rightarrow$

$$t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{sau} \\ t = 1 \end{cases}$$

$E_3)$ $t = 0 \Rightarrow 2^x = 0$ fals pt că $2^x > 0$

$\Rightarrow 2^x > 0$

$t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Fie $f(x) = x + \ln x$, arătați că

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$$

$E_1)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$

$E_2)$ $f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(2) \overset{2}{=} 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$E_3)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{3}{2}$

Găsiți ec. tangentei la G_f în $x=1$, știind că $f(x)=x+\ln x$

E_1) Ec. tg în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E_2) În cazul nostru, $x=1$

$$\Rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E_3) $f'(x)=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}\Rightarrow$

$$f'(1)=1+1=2$$

$$f(1)=1+\ln 1=1+0=1$$

E_4) Ec. tg.: $y-1=2(x-1)$

$$\Rightarrow y-1=2x-2\Rightarrow 2x-y-1=0$$

Fie $f(x) = x + \ln x$, arătați că f este concavă pe $(0, \infty)$

E_1) Vom arăta că $f''(x) \leq 0$ pe $(0, \infty)$

E_2) $f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x}$

E_3) $f''(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = 0 - \frac{1}{x^2} \leq 0$

$\Rightarrow f$ concavă pe $(0, \infty)$

Fie $f_n(x) = (x+n)e^x$, calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$

E1) $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 (x+1)e^x\,dx$

E2) $f(x) = x+1 \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

E3) $I = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$

$= 2e - 1e^0 - e^x\Big|_0^1 =$

$= 2e - 1 - (e - e^0) =$

$= 2e + 1 - e + 1 = e$

Fie $f_n(x)=(x+n)e^x$, arătați că f_{2011} este o primitivă pentru f_{2012}

E_1) F primitivă pt $f \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

E_2) f_{2011} primitivă pt $f_{2012} \Leftrightarrow f_{2011}'(x)=f_{2012}(x)$

E_3) $f_{2011}'(x)=\left((x+2011)e^x\right)'=$

$=(x+2011)'e^x+(x+2011)(e^x)'=$

$=1\cdot e^x+(x+2011)e^x=$

$=e^x(1+x+2011)$

$=e^x(x+2012)=(x+2012)e^x$ (1)

E_4) $f_{2012}(x)=(x+2012)e^x$ (2)

Din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Fie $f_n(x) = (x+n)e^x$, arătați că $\int_0^1 f_n(x)dx \geq \frac{9n+5}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ folosind eventual $e^x \geq x+1$

$E_1) I = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (x+n)e^x dx$

$E_2)$ Dar, $e^x \geq x+1 \mid \cdot (x+n)$

$\Rightarrow (x+n)e^x \geq (x+n)(x+1) \mid \int_0^1 \dots dx$

$E_3) \Rightarrow I_n \geq \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx \Rightarrow$

$I_n \geq \int_0^1 (x^2+nx+x+n)\,dx \Rightarrow$

$I_n \geq \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + n\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + nx\Big|_0^1$

$\Rightarrow I_n \geq \frac{1}{3} + \frac{n}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(1-0) + n(1-0)$

$\Rightarrow I_n \geq \frac{2}{1}\frac{1}{3} + \frac{3}{n}\frac{n}{2} + \frac{3}{1}\frac{1}{2} + \frac{6}{n} = \frac{9n+5}{6}$

$\Rightarrow I_n \geq \frac{9n+5}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$