Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

TOAMNA, 2013

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1=1$ şi $b_4=27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}=9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $BC=5$ şi $\sin C=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ m & 0 & 0\\ m & 0 & m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m ştiind că $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(101))=-51^2\cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Calculaţi $3\circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstraţi că $I_n=\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Prof. Ovidiu Bădescu

V122
I 1

Găsiți rația progresiei geometrice b_n dacă $b_1 = 1$ și $b_4 = 27$

$E_1)$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$E_2)$ $b_4 = b_1 \cdot q^3 \Rightarrow 27 = 1 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122
Găsiți coordonatele vârfului pentru I/2

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

E1) $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

E2) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}{4 \cdot 1} = -\frac{36 - 32}{4} = -1$

$\Rightarrow V(3; -1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați $3^{x+2} = 9^{1-x}$ V122 I/3

E_1) Deoarece $9 = 3^2 \Rightarrow$ ecuația este

$$3^{x+2} = (3^2)^{1-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x+2} = 3^{2-2x}$$

E_2) baza $= 3 \Rightarrow x+2 = 2-2x$

$$\Rightarrow x+2x = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să fie pătrat perfect

$$E_1)\ P = \frac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$$

$E_2)$ m. caz posibile: numărul numerelor de 2 cifre $\overline{ab}$ unde $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
independ

$\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ numere

$E_3)$ m. caz favorabile: numărul pătratelor perfecte de 2 cifre:

$1^2 = 1$ de o cifră
$2^2 = 4$ — 4 —
$3^2 = 9$ — 4 —
$4^2 = 16$ OK
$5^2 = 25$ OK
$6^2 = 36$ OK
$7^2 = 49$ OK
$8^2 = 64$ OK
$9^2 = 81$ OK
$10^2 = 100$ de 3 cifre

$\Rightarrow$ 6 favorabile

$E_1)\ P = \frac{6}{\quad} = \frac{1}{15}$

Prof. Ovidiu Băescu

V/122
I/5

Fie $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Se cere lungimea lui $\overrightarrow{AC}$

E_1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC} = (4\vec{i} - 3\vec{j}) + (2\vec{i} - 5\vec{j})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

E_2) Folosim $|\vec{v}| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2} \Rightarrow$

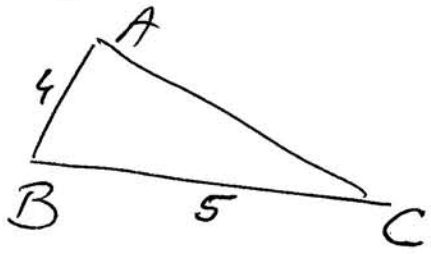
$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Prof. Ovidiu Badescu

V122

Calculați $\sin A = ?$ dacă $AB = 4$, $BC = 5$ și $\sin C = \frac{4}{5}$ I/6



E_1) Nu ne spune nimeni că e triunghi dreptunghic, deci nu putem folosi $\sin A = \frac{\text{cat. opusă}}{\text{ip}}$

E_2) Folosim T. sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 5 \cdot \frac{4}{5} = 4 \sin A$$

$$\Rightarrow 4 = 4 \sin A \Rightarrow \sin A = 1$$

Prof. Ovidiu Sădescu

V122
II 1a)

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$, calculați

$\det(A(1))$

$E_1)$ $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$E_2/\det A(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+0+0-0-0-1=$

$=-1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&0&m\end{pmatrix}$, determinați $m\in\mathbb{R}$ dacă $A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ II 16)

$E_1)\ A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\m&0&0\\m&0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\-m&0&0\\-m&0&-m\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1-m-m&1+0+0&1+0-m\\m+0+0&m+0+0&m+0+0\\m+0-m^2&m+0+0&m+0-m^2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1-2m&1&1-m\\m&m&m\\m-m^2&m&m-m^2\end{pmatrix}$

$E_2)\ A(m)\cdot A(-m)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}1-2m=-1\Rightarrow m=1\\1=1\\1-m=0\Rightarrow m=1\\m=1\Rightarrow m=1\\m-m^2=0\Rightarrow m\in\{0,1\}\\m=1\Rightarrow m=1\end{cases}$

Dar, m același $\Rightarrow$ m comun $\Rightarrow m=1$

Prof. Ovidiu Badescu

V122

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$, arătați că II 1c)

$$\det(A(1)+A(2)+\dots+A(101))=-51^2\cdot 101^3$$

$E_1)\ A(1)+A(2)+\dots+A(101)=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ \frac{101\cdot 102}{2}51 & 0 & 0 \\ \frac{101\cdot 102}{2} & 0 & \frac{101\cdot 102}{2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101\cdot 51 & 0 & 0 \\ 101\cdot 51 & 0 & 101\cdot 51 \end{pmatrix}$$

$E_2)\ \det(A(1)+A(2)+\dots+A(101))=$

$$=\begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101\cdot 51 & 0 & 0 \\ 101\cdot 51 & 0 & 101\cdot 51 \end{vmatrix}=0+0+0-0-0-101^3\cdot 51^2$$

$$=-51^2\cdot 101^3$$

Prof. Ovidiu Badescu

V12 a
II 2 a)

Fie $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$, calculați

$3 \circ 4$

E1) $3 \circ 4 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 20$

$3 \circ 4 = 12 - 12 - 16 + 20$

$3 \circ 4 = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122

II 26)

Fie $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$

Arătați că $x \circ y = (x-4)(y-4)+4, \forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1) x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$

$\Rightarrow x \circ y = x(y-4) - 4(y-4) - 16 + 20$

$E_2) \quad x \circ y = (x-4)(y-4)+4$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{2013 \text{ ori}} = 5$ II 2 c)

E_1) Atunci când avem o compunere cu același termen considerat de foarte multe ori, folosim forma restrânsă $\Rightarrow x \circ y = x(y-4) - 4(y-4) - 16 + 20$

$$x \circ y = (x-4)(y-4) + 4 \quad (1)$$

E_2) $x \circ x = (x-4)(x-4) + 4 = (x-4)^2 + 4$

$x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = ((x-4)^2 + 4) \circ x \overset{(1)}{=}$

$\overset{(1)}{=} ((x-4)^2 + 4 - 4)(x-4) + 4 = (x-4)^3 + 4$

E_3) Observăm că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ ori}} = (x-4)^n + 4$, arăt. prin inducție

I $P(2)$: $x \circ x = (x-4)^2 + 4$ adev. din E_2

II Fie $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev. unde

$P(k)$: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k \text{ ori}} = (x-4)^k + 4$ și $P(k+1)$: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k+1} = (x-4)^{k+1} + 4$

Știm că $P(k)$ adev. $\Rightarrow \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k \text{ ori}} = (x-4)^k + 4 \Big| \circ x$

$\Rightarrow \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k+1} = ((x-4)^k + 4) \circ x =$

$= ((x-4)^k + 4 - 4)(x-4) + 4 = (x-4)^{k+1} + 4 \Rightarrow P(k+1)$ adev.

Fin. E_c: $(x-4)^{2013} + 4 = 5 \Rightarrow (x-4)^{2013} = 1 \Rightarrow x - 4 = 1$

$\Rightarrow x = 5$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$ III 1.a)

Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{(x+e^x)^2}$, $\forall x\in(0,\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x+e^x}\right)'=\dfrac{(e^x)'(x+e^x)-e^x(x+e^x)'}{(x+e^x)^2}=$

$=\dfrac{e^x(x+e^x)-e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2}=$

$=\dfrac{xe^x+e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(x+e^x)^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{(x+e^x)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122
III 16)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$.

Găsiți ec. asimpt spre ∞ la G_f

E_1) as. orizontală:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x+e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} =$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y=1$ as. orizontală spre ∞

E_2) $\exists$ as. oriz spre $\infty \Rightarrow \nexists$ as. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

VII 22
III 1 c)

Fie $f(x)=\frac{e^x}{x+e^x}$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

Arătați că $f(x)\geq\frac{e}{e+1}$

Sunt 2 metode

met I: Facem tabelul de variație atașat lui f, e cea mai simplă metodă în caz că o putem folosi

E1) $f'(x)=\frac{(e^x)'(x+e^x)-e^x(x+e^x)'}{(x+e^x)^2}=$

$=\frac{e^x(x+e^x)-e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2}=\frac{xe^x+e^{2x}-e^x-e^{2x}}{(x+e^x)^2}=$

$=\frac{e^x(x-1)}{(x+e^x)^2}$

E2) $f'(x)=0\Rightarrow e^x(x-1)=0\Rightarrow$ $e^x=0$ fals sau $x-1=0\Rightarrow x=1$

E3)

x	$(0$		1	
f'	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
f	$\searrow$		$\frac{e}{1+e}$	$\nearrow$

$f(1)=\frac{e}{1+e}\Rightarrow f(x)\geq\frac{e}{1+e}$ din tabel

met II: Ideea „demonstrarea unor inegalități folosind monotonia"

E1) $f(x)\geq\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\frac{e^x}{x+e^x}\geq\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow\frac{e^x}{x+e^x}-\frac{e}{e+1}\geq 0$, $\forall x>0$

E2) Fie $g(x)=\frac{e^x}{x+e^x}-\frac{e}{e+1}$, $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{(x+e^x)^2}$

E3)

x	$(0$		1	
g'	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
g	$\searrow$			$\nearrow$

$g'(1)=\frac{e}{1+e}-\frac{e}{e+1}=0$

$\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow\frac{e^x}{x+e^x}\geq\frac{e}{e+1}$

Prof. Dragoș Bălănescu

V122

III 2a)

Fie $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$

Calculați I_0

$E_1) I_0 = \int_0^1 x e^{-0 \cdot x^2} dx = \int_0^1 x e^0 dx = \int_0^1 x dx$

$E_2) I_0 = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122
III 2 b)

Fie $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$, arătați că

$I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}'$

$E_1)$ $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x e^{-(n+1)x^2} dx - \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$

$= \int_0^1 \left(x e^{-(n+1)x^2} - x e^{-nx^2} \right) dx =$

$= \int_0^1 x e^{-nx^2} \left(e^{-x^2} - 1 \right) dx$

$E_2)$ Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 \in [0;1] \Rightarrow -x^2 \in [-1;0]$

$\Rightarrow e^{-x^2} \in [e^{-1}; e^0] \Rightarrow e^{-x^2} \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$

$\Rightarrow e^{-x^2} - 1 \leq 0$

$x \in [0;1] \Rightarrow x e^{-nx^2} \geq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$E_3)$ $\Rightarrow x e^{-nx^2} \left(e^{-x^2} - 1 \right) \leq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 x e^{-nx^2} \left(e^{-x^2} - 1 \right) dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Prof. Ovidiu Bădescu

V122

Fie $I_n = \int_0^1 x e^{-nx^2} dx$, demonstrați III 2c)

că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

E_1) Dacă încercăm să calculăm folosind integrarea prin părți, nu iese

E_2) Folosim schimbare de variabilă,

notăm $t = x^2 \mid (\,)' \Rightarrow dt = 2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0^2 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 1^2 \Rightarrow t = 1$

E_3) $I_n = \int_0^1 e^{-nt} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nt} dt =$

$= \frac{1}{2} \frac{e^{-nt}}{(-nt)'}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\frac{e^{-nt}}{-n}\Big|_0^1 =$

$= -\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{e^{nt}}\Big|_0^1\right) = \frac{-1}{2n}\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^0}\right)$

$= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$

Obs: S-a folosit $\int e^{at+b} dt = \frac{e^{at+b}}{(at+b)'}$