Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

VARA REZERVA, 2013

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $n=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$ este natural.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{6-x^2}=2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(3,1)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC dreptunghic în A, ştiind că $BC=8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ 1 & -1 & 1\\ x & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $A(0)\cdot A(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $\det\left(A(x)\right)=x^2-1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele întregi x pentru care inversa matricei $A(x)$ are elementele numere întregi.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.

5p **a)** Calculaţi $2\circ 3$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)-1}$, pentru orice x şi y numere reale.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x+2$.

5p **a)** Calculaţi $g'(2)$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-g(x)}{2x^3}=\dfrac{1}{6}$.

5p **c)** Demonstraţi că $2f(x)\geq g(x)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x+2}$ şi $F:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1(x+2)f(x)\,dx$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\int_{-1}^0 F(x)f(x)\,dx$.

V121
I/1

Arătați că $n \in \mathbb{N}$, $n = (\sqrt{3}-1)^2 + 2\sqrt{3}$

E_1) Folosim $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow n = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 1 + 1^2 + 2\sqrt{3}$

$n = 3 - \cancel{2\sqrt{3}} + 1 + \cancel{2\sqrt{3}}$

E_2) $n = 4 \in \mathbb{N}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V121

Găsiți coordonatele pct. de intersecție I/2
al graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ și
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x-1$

E_1) Punctul de intersecție se găsește prin rezolvarea sistemului.

E_2) De fiecare dată când apar funcții, ele pot fi înlocuite cu $y \Rightarrow$ avem sistem

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow x+1 = 2x-1$$

$$x - 2x = -2 \Rightarrow -x = -2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

E_3) $x = 2$, înlocuim în $y = x+1 \Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow$ punctul $M(2;3)$

Prof. Ovidiu Badescu

V121

I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{6-x^2} = 2^{x}$$

E_1) Din $2^{6-x^2} = 2^{x} \Rightarrow 6 - x^2 = x$

$\Rightarrow 6 - x^2 - x = 0 \mid \cdot(-1)$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$

E_3) $S_f : x \in \{-3, 2\}$

Prof. Ovidiu Badescu

V121 I/4

Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de 3 cifre, suma cifrelor acestuia să fie egală cu 2

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. de caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : toate nr. naturale de 3 cifre, adică toate nr. de forma $\overline{abc}$

$a \rightarrow$ 9 variante

$b \rightarrow$ 10 variante

$c \rightarrow$ 10 variante

independente

regula produsului : $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

$E_3)$ nr. caz favorabile : toate nr. naturale de 3 cifre cu suma cifrelor egală cu 2

101; 110; 200 $\Rightarrow$ 3 numere

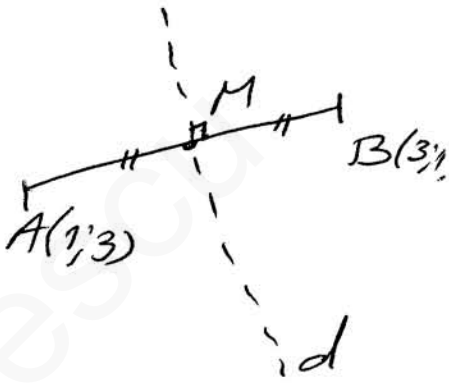
$E_4)$ $P = \dfrac{3}{900} = \dfrac{1}{300}$

Prof. Ovidiu Băescu

V1=1

Fie $A(1;3)$ și $B(3;1)$, se cere ecuația mediatoarei lui AB I/5

E_1) mediatoarea lui AB este perpendiculara ce trece prin mijlocul lui AB



E_2) M mijl lui $AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2;2)$$

E_3) $d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

E_4) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$

Din $m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d \cdot (-1) = -1 \Rightarrow m_d = 1$

E_5) știm $M(2;2)$ și știm $m_d = 1$

$\Rightarrow$ ec d: $y - y_M = m_d(x - x_M)$

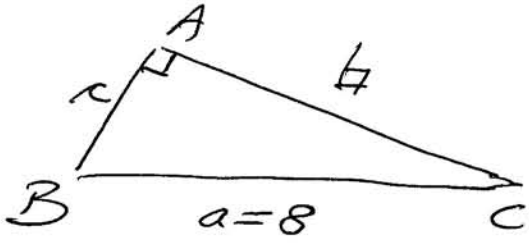
$\Rightarrow y - 2 = 1(x-2) \Rightarrow y - 2 = x - 2$

$\Rightarrow y = x \Rightarrow \boxed{x - y = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/121
I/6

Calculați raza cercului circumscris ΔABC dreptunghic în A dacă $BC=8$



E_1) Vreau să calculez R

E_2) există T sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

E_3) folosim $\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 90^\circ}=2R$

$$\Rightarrow \frac{8}{1}=2R \Rightarrow R=\frac{8}{2} \Rightarrow R=4$$

Prof. Ovidiu Badescu

V121
II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculați

$A(0)\cdot A(1)$

$E_1)\ A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1+0+1 & 1+0-1 & 1+0+1 \\ 1-1+1 & 1+1-1 & 1-1+1 \\ 0-1+1 & 0+1-1 & 0-1+1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V121
II 16)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(x)) = x^2-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)\ \det A(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -1+x^2-1+x+1-x$

$= -1+x^2 = x^2-1$

Prof. Ovidiu Badescu

Determinați numerele întregi x pentru care inversa matricii $A(x)$ are toate elementele întregi unde 1/121 II 1c)

$$A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1)$ $\det A(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1+x-1+x+1-x=$
$=x-1$

$E_2)$ Pt. ca să existe $(A(x))^{-1}$ trebuie $x-1\neq 0$
$\Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

$E_3)$ $(A(x))^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)$ $A^*=\begin{pmatrix} 0 & -x-1 & x+1 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ -1+x & 1+x^2 & -1-x \end{pmatrix}$ deoarece

$a^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$; $a^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(x+1)$
$=-x-1$

$a^*_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x+1$, analog celelalte

$E_5)$ $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{x^2-1}\begin{pmatrix} 0 & -x-1 & x+1 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ -1+x & 1+x^2 & -1-x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x-1} & \frac{1}{x-1} \\ \frac{1}{x+1} & -\frac{1}{x+1} & 0 \\ 1 & \frac{x^2+1}{x^2-1} & -1 \end{pmatrix}$, toate elem întregi $\Rightarrow$ $x-1\in\Delta_1\Rightarrow x-1\in\{\pm 1\}$
$x+1\in\Delta_1\Rightarrow x+1\in\{\pm 1\}$
$\frac{x^2+1}{x^2-1}\in\mathbb{Z}$ $\overset{//}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{x=0}$ sau $\boxed{x^2\neq 1}\in\mathbb{Z}$

Prof. Ovidiu Badescu

V121
II 2a)

Fie $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$

Calculați $2 \circ 3$

E1) $2 \circ 3 = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 + 2^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{4 \cdot 9 + 4 + 9} =$

$= \sqrt{36 + 13} = \sqrt{49} = 7$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 121
II 26)

Fie $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$

Arătați că $x \circ y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

met I

E_1) Deci, $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2} =$

$$= \sqrt{x^2(y^2+1) + (y^2+1)} - 1 =$$

$$= \sqrt{(y^2+1)(x^2+1)} - 1 =$$

$$= \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} - 1$$

met II:

E_1) Inițial arătat că $x \circ y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} - 1$

Dar, $\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} - 1 = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1} - 1 =$

$$= \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2} = x \circ y$$

Prof. Ciuiu Badescu

V12, II2c)

Fie $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$. Se știe că

$$x \circ y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1) - 1}$$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$x \circ x \circ x = x$$

E_1) Folosind $x \circ y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \circ x = \sqrt{(x^2+1)(x^2+1)-1} =$$

$$= \sqrt{(x^2+1)^2 - 1}$$

E_2) $x \circ x \circ x = (x \circ x) \circ x = \underbrace{\sqrt{(x^2+1)^2-1}}_{X} \circ \underbrace{x}_{Y} =$

$$= \sqrt{\left(\left(\sqrt{(x^2+1)^2-1}\right)^2 + 1\right)(x^2+1) - 1} =$$

$$= \sqrt{((x^2+1)^2 - 1 + 1)(x^2+1) - 1} = \sqrt{(x^2+1)^3 - 1}$$

E_3) Ecuația devine:

$$\sqrt{(x^2+1)^3 - 1} = x$$

Deși e ec cu radical de ordin 2, x poate rezolva ec. fără a pune condiții, dar la final este obligatoriu să se verif sol în ecuație. Altfel, $\sqrt{(x^2+1)^3-1} = x \mid ()^2 \Rightarrow$

$(x^2+1)^3 - 1 = x^2 \Leftrightarrow (x^2+1)^3 - (x^2+1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)[(x^2+1)^2 - 1] = 0$

$\Rightarrow$ de unde rau $(x^2+1)^2 = 1 \Rightarrow x^2+1 = \pm 1 \Rightarrow x^2 \in \{0, -2\} \Rightarrow x = 0$

V121

III 1 a)

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+2x+2$

Calculați $g'(2)$

E1) $g'(x)=2x+2$

E2) $g'(2)=2\cdot 2+2=6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = x^2 + 2x + 2$ V/2/ III/16)

Arătați că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2f(x) - g(x)}{2x^3} = \dfrac{1}{6}$

$E_1)$ $\ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - (x^2 + 2x + 2)}{2x^3} \overset{\frac{2-2}{0}}{=\!=\!=} \overset{\frac{0}{0} \to l'H}{}$

$E_2) \ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - (2x + 2)}{6x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=\!=} \overset{l'H}{}$

$E_3) \ell = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2}{12x} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=\!=} \overset{l'H}{} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x}{12} = \dfrac{1}{6}$

Prof. Ovidiu Băescu

V124
III 1c)

Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$ și $g(x) = x^2 + 2x + 2$

Arătați că $2f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [0, \infty)$

E_1) $2f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 2e^x \geq x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2e^x - x^2 - 2x - 2 \geq 0$, $\forall x \in [0, \infty)$

E_2) Fie $h: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

Facem tabel de variație pt h

E_3) $h'(x) = 2e^x - 2x - 2$

Pb. $h'(x)$ nu îi putem găsi nici semnul, nici rădăcinile $\Rightarrow$ calculăm $h''(x)$

E_4) $h''(x) = 2e^x - 2$

$h''(x) = 0 \Rightarrow 2(e^x - 1) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

E_5)

x	$-\infty$ ///	0	$+\infty$
h''	///	0 + + + + +	
h'	///	0 + + ↗ + +	
h	///	0 + ↗ + +	

Pt a găsi semnul lui $h''(x)$, calculăm

$h''(1) = 2e - 2 = 2(e-1) > 0 \Rightarrow h''(x) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'$ ↗ pe $(0, \infty)$

$h'(0) = 2e^0 - 2 \cdot 0 - 2 = 0$, pt a găsi semnul lui $h'(x)$ calculăm $h'(1) = 2e - 2 - 2 = 2(e-2) > 0 \Rightarrow$

$h'(x) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow h$ ↗, $h(0) = 0 \Rightarrow h(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$

$\Rightarrow 2f(x) \geq g(x)$, $\forall x \geq 0$

Pleșoviu Bădescu

III 2a)

Fie $f:(-2;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2+\frac{1}{x+2}$

Calculati $\int_0^1 (x+2)f(x)\,dx$

E1) $I=\int_0^1 (x+2)\left(x+2+\frac{1}{x+2}\right)dx=$

$=\int_0^1 \left((x+2)^2+1\right)dx=\int_0^1 (x^2+4x+4+1)\,dx$

E2) $I=\int_0^1 (x^2+4x+5)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+5x\Big|_0^1=$

$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+4\left(\frac{1}{2}-0\right)+5(1-0)=$

$=\frac{1}{3}+2+5=\frac{1}{3}+7=\frac{22}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V121
III 26)

Fie $f, F:(-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2+\frac{1}{x+2}$ și $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)$.

Verificați dacă F este o primitivă pentru f

$E_1)$ F primitivă pentru $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ \text{și} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

$E_2)$ F derivabilă – evident (1)

$E_3)$ $F'(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x+\ln(x+2)\right)'=$

$=\frac{1}{2}\cdot 2x+2\cdot 1+\frac{1}{x+2}\cdot(x+2)'=$

$=x+2+\frac{1}{x+2}=f(x)$ (2)

$E_4)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow F$ primitivă a lui f

Prof. Ovidiu Badescu

V124
III 20)

Fie $f, F: (-1;\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+2+\frac{1}{x+2}$ și $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x+2)$

Se știe că F este o primitivă pentru f, calculați $\int_{-1}^{0} F(x) f(x)\,dx$

E_1) Calculăm $I = \int_{-1}^{0} F(x) f(x)\,dx$ folosind integrarea prin părți

E_2) Deoarece există pericol de confuzie cu $f(x)$ ce apare în integrală, folosim în formulă funcțiile u și v astfel:

$$u(x) = F(x) \Rightarrow u'(x) = F'(x) = f(x)$$

$$v'(x) = f(x) \Rightarrow v(x) = \int f(x)\,dx = F(x)$$

$$I = F(x)F(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} f(x)F(x)\,dx$$

$$I = F^2(x)\Big|_{-1}^{0} - I \Rightarrow 2I = F^2(x)\Big|_{-1}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(F^2(0) - F^2(-1)\right)$$

E_3) $F(0) = 0+0+\ln 2$; $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \ln 1 = -\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\ln^2 2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\ln^2 2 - \frac{9}{4}\right)$$

Prof. Ovidiu Bădescu