Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

TOAMNA REZERVA, 2013

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1=2$ şi $a_3=8$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_3(4-x)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(4,1)$. Determinaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Arătaţi că $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 2 & m+1\\ 2 & m+1 & 2\\ m+1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(-1))$.

5p **b)** Verificaţi dacă $A(0)\cdot A(1)=5A(1)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det(A(m))=0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy-2x-2y+6$.

5p **a)** Verificaţi dacă $x\circ y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ 2=2\circ x=2$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x^4+3x^2+2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_1=\frac{e-2}{e}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $I_{n+1}=(n+1)I_n-\frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați suma primilor 3 termeni pt progr aritm a_n cu $a_1 = 2$, $a_3 = 8$

E_1) folosim $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow$

E_2) $S_3 = \frac{(a_1 + a_3) \cdot 3}{2} = 2+3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Determinați coord. vârfului pt $f(x)=x^2-4x+2$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$E_2)$ $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16-8}{4} = -\frac{8}{4} = -2$

$\Rightarrow V(2,-2)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\log_3 x = \log_3 (4-x)$

E_1) deoarece $f(x) = \log_3 x$ e inj $\Rightarrow$ ec. devine:

$x = 4 - x \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ sol posibilă

E_2) o verific în ec $\Rightarrow \log_3 2 = \log_3 (4-2)$ adev

$\Rightarrow x = 2$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, produsul cifrelor sale să fie 4

E_1) $P = \dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

E_2) nr. caz posibile: toate nr. nat de 2 cifre $\overline{ab}$ unde $a \to 9$ v, $b \to 10$ v, ind $\Rightarrow$ 90 numere

E_3) nr. caz favorabile: $\overline{ab}$ cu $a \cdot b = 4$

$\Rightarrow 14, 22, 41 \Rightarrow$ 3 numere

E_4) $P = \dfrac{3}{90} = \dfrac{1}{30}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(1,1)$, $B(4,1)$, să se afle lui M dacă

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$E_1)$ $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{i} + (y_M - 1)\vec{j}}$

$E_2)$ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j}$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 0\vec{j}}$$

$E_3)$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_M - 1 = \frac{1}{3} \cdot 3 \\ y_M - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_M = 2 \\ y_M = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow M(2;1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că: $4 \sin\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{12} = 1$

E_1) deoarece $2 \sin a \cos a = \sin 2a \Rightarrow$

$$2 \sin\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{12} = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4 \sin\frac{\pi}{12} \cos\frac{\pi}{12} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Se cere $\det(A(-1))=?$

$E_1)$ $\det(A(-1))=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0+0+0-0-8-8=$

$=-16$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

verificați dacă $A(0)\cdot A(1)=5A(1)$

$E_1)$ $A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $5A(1)=5\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) + (2) $\Rightarrow A(0)A(1)=5A(1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Se cere $m=?$ dacă $\det(A(m))=0$

E1) $\det(A(m))=\begin{vmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2+C_3\to C_1}$

$=\begin{vmatrix} m+5 & 2 & m+1 \\ m+5 & m+1 & 2 \\ m+5 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & m+1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2-L_1\to L_2 \\ L_3-L_1\to L_3 \end{matrix}$

$=(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & m+1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix}=(m+1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m \end{vmatrix}=$

$=(m+1)\left[(1-m)(m-1)-0\right]=(m+1)(1-m)(m-1)$

E2) $\det(A(m))=0 \Rightarrow$
- $m+1=0\Rightarrow m=-1$
- sau
- $1-m=0\Rightarrow m=1$
- sau
- $m-1=0\Rightarrow m=1$

$\Rightarrow m\in\{-1;1\}$

Obs.: se putea calcula determinantul cu regula triunghiului, apoi schema lui Horner

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, arătați că

$$x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$$

$E_1)$ $(x-2)(y-2)+2 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$

$= xy - 2x - 2y + 6 = x \circ y$

$\Rightarrow x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, arătați că

$$x \circ 2 = 2 \circ x = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

E,) $x \circ 2 = x \cdot 2 - 2x - 4 + 6 = 2$

$2 \circ x = 2x - 4 - 2x + 6 = 2$

$\Rightarrow x \circ 2 = 2 \circ x = 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$ asociativă. Se știe că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, să se afle

$$1020\,30\ldots \circ 2013 = ?$$

$E_1)$ $x \circ y = (x-2)(y-2)+2 \Rightarrow x \circ 2 = (x-2)\cdot 0 + 2$

$$\Rightarrow \boxed{x \circ 2 = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$E_2)$ $x \circ y = (x-2)(y-2)+2 \Rightarrow 2 \circ y = 0 \cdot (y-2) + 2$

$$\Rightarrow \boxed{2 \circ y = 2,\ \forall y \in \mathbb{R}}$$

$E_3)$ Din o asociativă $\Rightarrow$

$$1020\,30\ldots \circ 2013 = \underbrace{(1 \circ 2)}_{x \circ 2 = 2} \circ (30\ldots \circ 2013) = 2 \circ (30\ldots \circ 2013) \underbrace{=}_{2 \circ y = 2} 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, atunci $f'(x)=\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

Fie $f'(x)=\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^3-1)'(x^2+1)-(x^3-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{3x^2(x^2+1)-(x^3-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4+2x}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, calculați $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ dacă

$f'(x)=\frac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

Ej) deoarece $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\frac{0+0+0}{(0+1)^2}=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+1}$, să se arate $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}$

$\in_1)\ l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x^3-1}{x^2+1}} \overset{1^\infty}{=\!=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{\frac{x^3-1}{x^2+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x^3-1}{x^2+1}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+1}} = e^2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, să se

$$I_1 = \frac{e-2}{e}$$

E1) $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{-x} dx = \int_0^1 x e^{-x} dx$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$

E2) $I_1 = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$

$= -(1 e^{-1} - 0 \cdot e^{-0}) - e^{-x} \Big|_0^1 =$

$= -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, arătați că

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$$

$E_1)$ $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx$

$f(x) = x^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1) x^n$

$g'(x) = e^{-x} \Rightarrow g(x) = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x}$

$$I_{n+1} = -x^{n+1} e^{-x} \Big|_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$I_{n+1} = -\left(1 e^{-1} - 0 e^{-0}\right) + (n+1) I_n$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, arătați că

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$E_1)$ $x \in [0;1] \Rightarrow x^n \geq 0$ (1)

$E_2)$ $x \in [0;1] \Rightarrow -x \in [-1;0] \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0$ (2)

$E_3)$ $\frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \mid \cdot x^n \geq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{e} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \mid \int_0^1 -- dx$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

$0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} - 0 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Prof. Ovidiu Badescu