Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c) SESIUINE SPECIALA, 2013
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 1, $2x+2$ şi 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+4}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare $\overline{ab}$ se pot forma, ştiind că $a,b\in\{2,3,4,5\}$ şi $a\neq b$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=8$ şi $BC=6$, se consideră vectorul $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$, unde $\{O\}=AC\cap BD$. Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=6$, $BC=10$ şi $\sin C=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+3X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(2)-f(-2)$.

5p **b)** Determinaţi restul împărţirii lui f la $X+2$, ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 9.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,1)$.

5p **b)** Verificaţi dacă funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$.

5p **c)** Determinaţi punctele de inflexiune a funcţiei f.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n=\int_1^2 x^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_1=e^2$.

5p **c)** Demonstraţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=2^{n+1}e^2-e$, pentru orice număr natural n.

BAC M1 2013 / V3 / OLIMPICI

Găsiți $x=?$ pt care numerele $1; 2x+2; 7$ sunt termeni consecutivi pentru progr. aritmetică

$E_1)$ a, b, c progr aritm $\Leftrightarrow a+c=2b$

$E_2)$ În cazul nostru $\Rightarrow 1+7=2(2x+2)$

$$8=4x+4 \Rightarrow -4x=-4 \mid :(-4)$$

$E_3)$ $x=\frac{-4}{-4} \Rightarrow x=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați distanța dintre pct de $\cap$ cu Ox pentru G_f, unde $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$E_1)$ $G_f \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$E_3)$ $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = f(x_1) \Rightarrow y_1 = 1 - 4 + 3 = 0 \Rightarrow A(1;0)$

$x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = f(x_2) \Rightarrow y_2 = 9 - 12 + 3 = 0 \Rightarrow B(3;0)$

$\angle$ * se putea găsi direct coordonata lui y deoarece $A, B \in Ox \Rightarrow y_A = 0$ și $y_B = 0$ *)

$E_4)$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1, BAC 2013, V3/I, 3

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2+4}=x+2$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x^2+4\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases}$

E_2) pentru $x^2+4\geq 0$, ec. atașată este $x^2+4=0$ care are $\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=0-16<0 \Rightarrow$ inec. are semnul lui $a=1$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+4	$+$	$+$	$+$

Deci, $x^2+4\geq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}=I_1$

E_3) pentru $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \Rightarrow x\in[-2,\infty)=I_2$

E_4) $I_C=I_1\cap I_2=[-2,\infty)$

E_5) inec.: $\sqrt{x^2+4}=x+2 \,/\,()^2 \Rightarrow x^2+4=x^2+4x+4$

$\Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0\in I_C \Rightarrow x=0$ soluție

Obs.: o metodă mai simplă era rezolvarea ecuației fără a pune condițiile, însă atunci eram obligați să verificăm soluția în ecuația inițială și să alegem doar soluțiile corecte

Prof. Ovidiu Badescu

Câte numere impare $\overline{ab}$ se pot forma dacă

$a, b \in \{2, 3, 4, 5\}$ și $a \neq b$

E_1) $a = 2 \Rightarrow b$ poate fi $\{3; 5\} \Rightarrow$ 2 numere

E_2) $a = 3 \rightarrow b$ poate fi doar 5 (pt că $a \neq b$) $\rightarrow$ 1 număr

E_3) $a = 4 \rightarrow b$ poate fi $\{3; 5\} \Rightarrow$ 2 numere

E_4) $a = 5 \Rightarrow b$ poate fi doar 3 (pt că $a \neq b$) $\Rightarrow$ 1 număr

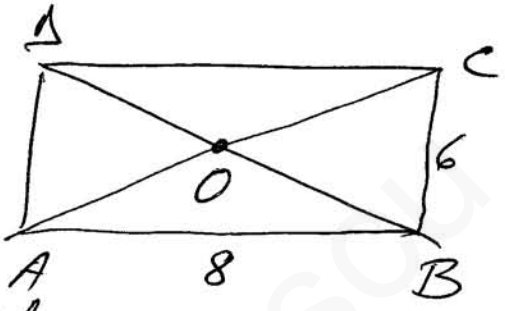
E_5) Deoarece am discutat pe cazuri, deci regula sumei $\Rightarrow (2 + 1 + 2 + 1) = 6$ numere

Prof. Ovidiu Băescu

M1, BAC 2013, V3, I/5

Fie $ABCD$ dreptunghi cu $AB=8$, $BC=6$ și fie $\vec{v}=\vec{AB}+\vec{AO}+\vec{AB}$ unde $\{O\}=AC\cap BD$.

Calculați lungimea lui $\vec{v}$



$E_1)\ |\vec{v}|=|\vec{AB}+\vec{AO}+\vec{AB}|$

$E_2)$ Pentru a calcula modulul unei sume de vectori, îi exprimăm pe toți în funcție de același vector

$E_3)\ \vec{AB}+\vec{AO}+\vec{AB}=\left(\vec{AB}+\vec{AB}\right)+\vec{AO}=\vec{AC}+\vec{AO}$

$E_4)$ Dar, în dreptunghi diagonalele se înjumătățesc

$\Rightarrow |\vec{AC}+\vec{AO}|=|2\vec{AO}+\vec{AO}|=|3\vec{AO}|=3|\vec{AO}|=3AO$

$E_5)$ În $\triangle ABC$, T. Pit $\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2=64+36\Rightarrow AC^2=100\Rightarrow AB=10$

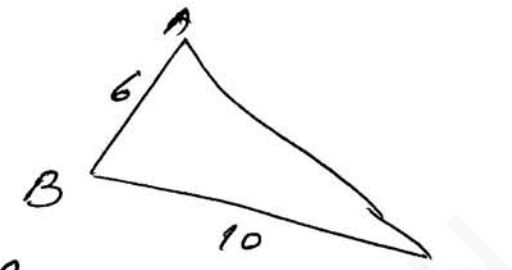
$E_6)\ AO=\frac{1}{2}AB\Rightarrow AO=5\Rightarrow 3AO=15\Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{v}|=15$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $\sin A$ în $\triangle ABC$ în care

$AB=6$, $BC=10$ și $\sin C=\frac{3}{5}$



$E_1)$ Din T. sinusurilor

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=2R$$

$$E_2) \Rightarrow \frac{6}{\frac{3}{5}}=\frac{10}{\sin A} \Rightarrow \frac{30}{3}=\frac{10}{\sin A} \Leftrightarrow 10=\frac{10}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \sin A=1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Calculați $\det A(0)$

E1) $A(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E2) $\det A(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0$

$\det A(0)=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, găsiți valorile lui a pentru care $5A(a)-(A(a))^2=4I_3$

$E_1)\ 5A(a)=5\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5a & 5 & 5 \\ 5 & 5a & 5 \\ 5 & 5 & 5a \end{pmatrix}$

$E_2)\ (A(a))^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & a^2+2 & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & a^2+2 \end{pmatrix}$

$E_3)\ 5A-(A(a))^2=\begin{pmatrix} 5a-a^2-2 & 4-2a & 4-2a \\ 4-2a & 5a-a^2-2 & 4-2a \\ 4-2a & 4-2a & 5a-a^2-2 \end{pmatrix}$

$E_4)\ 5A(a)-(A(a))^2=4I_3$

$\Rightarrow \begin{cases} 5a-a^2-2=4 \\ 4-2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-5a+6=0 \\ 2a=4 \Rightarrow a=2 \end{cases}$

$E_5)\ a^2-5a+6=0 \Rightarrow a_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}\begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$E_6)\ \begin{cases} a\in\{2;3\} \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, determinați inversa matricii $A(2)$

$E_1)\ A(2)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(2)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8+1+1-2-2-2$
$= 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$E_2)\ (A(2))^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$

$E_3)\ a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(4-1)=3$

$a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot(2-1)=-1$

Analog, $a_{13}^*=-1,\ a_{21}^*=-1,\ a_{22}^*=3,\ a_{23}^*=-1,$
$a_{31}^*=-1,\ a_{32}^*=-1,\ a_{33}^*=3$

$E_4)\ A^*=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^* \Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$ unde $m \in \mathbb{R}$ VM 2.39

Calculați $f(2) - f(-2)$

$E_1)$ $f(2) = 8 - 4m + 6 - 1 = 13 - 4m$

$E_2)$ $f(-2) = -8 - 4m - 6 - 1 = -15 - 4m$

$E_3)$ $f(2) - f(-2) = (13 - 4m) - (-15 - 4m) =$

$= 13 - 4m + 15 + 4m = 28$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = x^3 - mx^2 + 3x - 1$. Determinați restul împărțirii lui f la $x+2$ știind că restul împărțirii lui f la $x-2$ este 9

E_1) restul $f : (x+2)$ este $f(-2)$

E_2) restul $f : (x-2)$ este $f(2)$, știm că restul lui $f : (x-2)$ este $9 \Rightarrow f(2) = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 - 4m + 6 - 1 = 9 \Rightarrow 13 - 4m = 9$

$\Rightarrow -4m = -4 \Rightarrow m = 1$

E_3) Pt. $m = 1 \Rightarrow f = x^3 - x^2 + 3x - 1$

E_4) restul lui $f : (x+2)$ este $f(-2) = -8 - 4 - 6 - 1$

$\Rightarrow$ restul este -19

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 - mX^2 + 3X - 1$, găsiți numerele reale m pentru care $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$ unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f

---

E1) x_1 rad $\Rightarrow f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1^3 - m x_1^2 + 3x_1 - 1 = 0$

x_2 rad $\Rightarrow f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2^3 - m x_2^2 + 3x_2 - 1 = 0$

x_3 rad $\Rightarrow f(x_3) = 0 \Rightarrow x_3^3 - m x_3^2 + 3x_3 - 1 = 0$

E4) adunând: $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3 = 0$

E5) Dar, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

$$S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m$$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m^2 - 2 \cdot 3 = m^2 - 6$$

E6) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m$

E7) înlocuind în E4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)}_{S = 3 \text{ (ipoteză)}} - m \cdot (m^2 - 6) + 3 \cdot m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow S = 3 \Rightarrow \cancel{3} - m^3 + 6m + 3m - \cancel{3} = 0$$

E8) $-m^3 + 9m = 0 \mid \cdot (-1) \Rightarrow m^3 - 9m = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(m^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3 \end{cases}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$

Calculați $f'(x) = ?$

$E_1)\ f'(x) = \left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$

$E_2)\ f'(x) = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{(1-x)'(1+x) - (1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$

$E_3)\ f'(x) = \frac{-1\cdot(1+x) - (1-x)\cdot 1}{(1-x)(1+x)}$

$E_4)\ f'(x) = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

Verificați dacă $f\searrow$ pe $(-1,1)$

E1) $f'(x)=\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$

$=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}=$

$=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-2}{1-x^2}$

E2) $f'(x)=0\Rightarrow -2=0$ fals

E3) semnul lui $f'(x)$: $1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

x	$(-1$				$1)$
-2		$-$	$-$	$-$	
$1-x^2$		$+$	$+$	$+$	
$\frac{-2}{1-x^2}$		$-$	$-$	$-$	

E4)

x	$(-1$			$1)$
f'		$-$	$-$	
f		$\searrow$		

$f'(x)<0\Rightarrow f\searrow$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

Calculați punctele de inflexiune pentru f

$E_1)\ f'(x)=\left(\ln\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=$

$=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-1(1+x)-(1-x)\cdot(+1)}{(1+x)^2}=$

$=\frac{-1-x+1+x}{1-x^2}=\frac{-2}{1-x^2}$

$E_2)\ f''(x)=\left(\frac{-2}{1-x^2}\right)'=-2\cdot\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'=$

$=-2\cdot\frac{1'(1-x^2)-1\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=-2\cdot\frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$E_3)\ f''(x)=\frac{-4x}{(1-x^2)^2}$

$E_4)\ f''(x)=0\Rightarrow -4x=0\Rightarrow x=0$

$E_5)$

x	$(-1$		0		$1)$
f''	//	$+$	0	$-$	//
f	//	$\cup$ convexă		$\cap$ concavă	//

$x=0$ punct de inflexiune

Fie $I_n = \int_1^2 x^n \cdot e^x dx$

Calculați I_0

E1) $I_0 = \int_1^2 x^0 \cdot e^x dx = \int_1^2 e^x dx$

E2) $I_0 = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e^2 - e$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$

Calculați I_1

E1) $I_1 = \int_1^2 x e^x dx$

E2) $f = x \Rightarrow f' = 1$

$g' = e^x \Rightarrow g = e^x$

E3) $I_1 = x \cdot e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx$

$I_1 = (2e^2 - 1e^1) - e^x \Big|_1^2$

$I_1 = (2e^2 - e) - (e^2 - e)$

$I_1 = e^2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$

Demonstrați că

$$I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2 - e$$

$E_1)$ $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx$

$E_2)$ $f = x^{n+1} \Rightarrow f' = (n+1) x^n$

$g' = e^x \Rightarrow g = e^x$

$E_3)$ $I_{n+1} = x^{n+1} e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 (n+1) x^n e^x dx$

$I_{n+1} = \left(2^{n+1} e^2 - 1^{n+1} e^1\right) - (n+1) \int_1^2 x^n e^x dx$

$I_{n+1} = 2^{n+1} e^2 - e - (n+1) I_n$

$E_4)$ $I_{n+1} + (n+1) I_n = 2^{n+1} e^2 - e$

Prof. Ovidiu Badescu