Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c) VARA, 2013
Matematică *M_mate-info*
Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$. Calculaţi $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x)=\log_2(1+x)$.

5p **4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 2200 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ştiind că $\frac{3\sin x+\cos x}{\sin x}=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătaţi că $D(2,3)=2$.

5p **b)** Verificaţi dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n\left(n,n^2\right)$, unde n este un număr natural nenul. Determinaţi numărul natural n, $n\geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1.

2. Se consideră x_1,x_2,x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-4X^2+3X-m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=4$, arătaţi că $f(4)=8$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care rădăcinile polinomului f verifică relaţia $x_1+x_2=x_3$.

5p **c)** Dacă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7(x_1+x_2+x_3)$, arătaţi că f se divide cu $X-3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Arătaţi că $1\leq(n+1)I_n\leq e$, pentru orice număr natural nenul n.

V120
I/1

Arătați că numărul $a=3(3-2i)+2(5+3i)$ este real

E.1) $a=9-6i+10+6i$

$a=19 \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V126
I/2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-1$.

Calculați $f(1)+f(2)+\dots+f(10)$

$E_1)$ $f(1)=3$

$f(2)=7$

$f(3)=11$

$f(4)=15$

$f(5)=19$

$f(6)=23$

$f(7)=27$

$f(8)=31$

$f(9)=35$

$f(10)=39$

$E_2)$ $f(1)+f(2)+\dots+f(10)=(3+7+\dots+39)=$

$=(3+7)+(11+15)+(19+23)+(27+31)+(35+39)=$

$=10+26+42+58+74=$

$=36+100+74=210$

<u>met II</u>: Dbs. că numerele sunt în progr. aritm cu $a_1=3$, $a_n=39$ și sunt 10 termeni

$\Rightarrow S_{10}=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}=\frac{(3+39)\cdot 10}{2}=21\cdot 10=210.$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_2(2x) = \log_2(1+x)$$

E_1) Cond.: $\begin{cases} 2x>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in(0;\infty)=I_1 \\ 1+x>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in(-1;\infty)=I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (0;\infty)$

E_2) Deoarece funcția $f(x)=\log_2 x$ este injectivă,

din $\log_2(2x)=\log_2(1+x) \Rightarrow 2x=1+x \Rightarrow x=1\in I_c$

E_3) $S_f: x=1$

Prof. Ovidiu Badescu

VI 2c
I/4

După o scumpire cu 10%, prețul unui produs este 2.200 lei. Calculați prețul înainte de scumpire.

E_1) ~~Fie~~ prețul inițial x lei

E_2) $x + \frac{10}{100} \cdot x = 2.200 \rightarrow \overset{10/}{x} + \frac{1}{10}x = 2200$

$\rightarrow \frac{10x + x}{10} = 2200 \rightarrow 11x = 22000$

$\rightarrow x = \frac{22000}{11} = 2000$ lei

Prof. Ovidiu Bădescu

V/1 2c
I/5

Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari, unde $\vec{u} = \vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) în cazul nostru $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{a+1} \Rightarrow a+1 = 8$

$\Rightarrow a = 7$

Prof. Ovidiu Bădescu

VI 26
I/6

Determinați $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ știind că

$$\frac{3\sin x + \cos x}{\sin x} = 4$$

E_1) Relația $\Leftrightarrow \frac{3\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 + \operatorname{ctg} x = 4 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 1$

E_2) $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ și $\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Obs.: dacă nu era doar din tabel, ca metodă generală: $\operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x \in \{\operatorname{arcctg} 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Rt a avea soluții din $(0; \frac{\pi}{2})$, dăm valori lui k:

$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin (0; \frac{\pi}{2})$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ soluție

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4} \notin (0; \frac{\pi}{2})$

$S_f: \quad x = \frac{\pi}{4}$

Prof. Ovidiu Pădescu

V 120
II/1a

Fie $\Delta(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ cu $a,b\in\mathbb{R}$.

Arătați că $\Delta(2;3)=2$

$E_1)$ $\Delta(2,3)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}=4+3+18-12-9-2=$

$=25-23=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/120
II/16

Fie $D(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$ cu $a,b\in\mathbb{R}$

Verificați dacă $D(a,b)=(a-1)(b-1)(b-a)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$

E1) $D(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l_2-l_1 \\ l_3-l_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & a^2-1 & 0 \\ b-1 & b^2-1 & 0 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 \\ b-1 & b^2-1 \end{vmatrix}$

E2) $D(a,b)=1\cdot \begin{vmatrix} a-1 & (a-1)(a+1) \\ b-1 & (b-1)(b+1) \end{vmatrix}$

factor l_1 / factor de pe l_2 $(a-1)(b-1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 1 & b+1 \end{vmatrix}=$

$=(a-1)(b-1)(b+1-a-1)=$

$=(a-1)(b-1)(b-a)$

Obs.: Era corect calcularea lui $D(a,b)$ cu formulă și înmulțirea parantezelor de la rezultat, adică:

$D(a,b)=a^2+ab^2+b-a^2b-b^2-a$ (1)

$(a-1)(b-1)(b-a)=(ab-a-b+1)(b-a)=$

$=ab^2-a^2+ab+b-a$ (2)

adică

V120

Fie $P_n(n, n^2)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați n, $n \geq 3$ astfel încât aria lui $P_1P_2P_n$ să fie egală cu 1. II 1/c

---

E1) $\mathcal{A}_{P_1P_2P_n} = \frac{1}{2}|\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_n & y_n & 1 \end{vmatrix}$

E2) Din $P_n(n; n^2) \Rightarrow P_1(1;1);\ P_2(2;4);\ P_n(n;n^2)$

E3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ n & n^2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + n + 2n^2 - 4n - n^2 - 2 =$

$= n^2 - 3n + 2$

E4) $\mathcal{A}_{P_1P_2P_3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|n^2 - 3n + 2| = 1 \Rightarrow |n^2 - 3n + 2| = 2$

$\Rightarrow n^2 - 3n + 2 = \pm 2$

E5) Caz I: $n^2 - 3n + 2 = 2 \Rightarrow n^2 - 3n = 0$

$\Rightarrow n(n-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} n_1 = 0 \text{ Fals, pt că } n \geq 3 \\ \text{sau} \\ n_2 = 3 \quad \text{Ok.} \end{cases}$

Caz II: $n^2 - 3n + 2 = -2 \Rightarrow n^2 - 3n + 4 = 0$

$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$

Fals

S_f: $n = 3$

Prof. Ovidiu Badescu

V120
II 2a)

Fie $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$.

Pentru $m = 4$, arătați că $f(4) = 8$

$E_1)$ $m = 4 \Rightarrow f = X^3 - 4X^2 + 3X - 4$

$E_2)$ $f(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 4$

$f(4) = 64 - 64 + 12 - 4$

$f(4) = 8$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/120
II 26

Fie $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile lui f verifică

$$x_1 + x_2 = x_3$$

E_1) Din Viete, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 4 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} = 3 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = m \end{cases}$

E_2) Folosim $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ și $x_1 + x_2 = x_3$

$\Rightarrow 2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2$

E_3) Deci, $x_3 = 2$ e rădăcină $\Rightarrow f(x_3) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$

$\Rightarrow 8 - 16 + 6 - m = 0 \Rightarrow -2 - m = 0$

$\Rightarrow -m = 2 \mid \cdot (-1) \Rightarrow m = -2$

Prof. Ovidiu Băescu

V120
II 20)

Fie $f = X^3 - 4X^2 + 3X - m$. Dacă avem relația $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3)$, arătați că f se divide cu $X - 3$

E_1) x_1 rad $\Rightarrow f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1^3 - 4x_1^2 + 3x_1 - m = 0$

x_2 rad $\Rightarrow f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2^3 - 4x_2^2 + 3x_2 - m = 0$

x_3 rad $\Rightarrow f(x_3) = 0 \Rightarrow x_3^3 - 4x_3^2 + 3x_3 - m = 0$

E_2) adunând $\Rightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3m = 0$

E_3) dar, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 7(x_1 + x_2 + x_3) = 7S_1$ (din ipoteză)

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) =$

$= S_1^2 - 2S_2$ (formulă)

E_4) $\overset{E_2)}{\Rightarrow}$ $7S_1 - 4(S_1^2 - 2S_2) + 3S_1 - 3m = 0$

$7S_1 - 4S_1^2 + 8S_2 + 3S_1 - 3m = 0$

$10S_1 - 4S_1^2 + 8S_2 - 3m = 0$

E_5) Din Viete $\Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = 4$; $S_2 = \frac{c}{a} = 3$

$\Rightarrow 10 \cdot 4 - 4 \cdot 16 + 8 \cdot 3 - 3m = 0$

$-24 + 24 - 3m = 0 \Rightarrow -3m = 0 \Rightarrow m = 0$, încheiere

E_6) $f = X^3 - 4X^2 + 3X$

E_7) $f : (X - 3) \Leftrightarrow f(3) = 0$ (teorie)

$f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 = 27 - 36 + 9 = 0$

$f(3) = 0 \Rightarrow f : (X - 3)$

Prof. Ciuiu Bădescu

V120
III (a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$

Calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)'=-\sin x+\frac{1}{2}\cdot 2x$

$$f'(x)=-\sin x+x$$

Prof. Ovidiu Bădescu

1112
III 16)

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$

Determinați ecuația tangentei la G_f în punctul de abscisă $x_0 = 0$ de pe G_f

---

E_1) Ec. tg în $x = \alpha$ este:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$\Rightarrow$ în cazul nostru este: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

E_2) $f(0) = \cos 0 + \frac{0}{2} = 1 + 0 = 1$

E_3) $f'(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)' = -\sin x + \frac{1}{2} \cdot 2x = -\sin x + x$

E_4) $f'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$

E_5) înlocuim în: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$\Rightarrow y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Prof. Ovidiu Badescu

V1 20
III 1 c)

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$

Arătați că $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

E_1) $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x + \frac{x^2}{2} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

E_2) Fie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$

$g'(x) = -\sin x + x$

Deoarece nu putem găsi semnul sau rădăcinile lui $g'(x)$, calculăm $g''(x) = (-\sin x + x)' = -\cos x + 1$

E_3) $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

și cum $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - \cos x \geq 0$

E_4)

x	-4π	-2π	0	2π	4π	6π
g''	... + 0 + + 0 + + 0 + + 0 + + 0 + + 0 + ...					
g'	- - - - - - - 0 + + + + + + +					
g	↘	↘	0	↗	↗	↗

E_5) $g''(x) \geq 0$ și $g''(x) = 0$ doar în puncte izolate $\Rightarrow$

$\Rightarrow g'$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow x = 0$ soluție unică

Observăm că $g'(0) = -\sin 0 + 0 = 0$

E_6) Deoarece g' ↗ și $g'(0) = 0 \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x < 0$

$g'(x) > 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow$ | g ↘, $\forall x < 0$ | Dar, $g(0) = \cos 0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

| g ↗, $\forall x > 0$ | $\overset{\text{tabel}}{\Rightarrow} g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

V/120
III 2 a)

Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^x dx$

Calculați I_1

E1) $I_1 = \int_0^1 x e^x dx$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x$

$\Rightarrow I_1 = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

E2) $I_1 = (1 \cdot e - 0 \cdot 1) - e^x \Big|_0^1$

$I_1 = e - (e^1 - e^0)$

$I_1 = 1$

Prof. Ovidiu Badescu

V120
III 25)

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Arătați că $I_{n+1} + (n+1) I_n = e, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$E_1)$ $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

$f(x) = x^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1) x^n$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x$

$I_{n+1} = x^{n+1} \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1) x^n e^x dx$

$E_2)$ $I_{n+1} = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - (n+1) \int_0^1 x^n \cdot e^x dx$

$I_{n+1} = e - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = e$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Se știe că $I_{n+1} + (n+1) I_n = e$, V 120 II 20)

se cere: $1 \leq (n+1) I_n \leq e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E_1) Din ipoteză $\Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = e \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1) I_n = e - I_{n+1}$

E_2) Trebuie arătat că $1 \leq e - I_{n+1} \leq e \mid -e$

$\Leftrightarrow 1 - e \leq -I_{n+1} \leq 0 \mid \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq e - 1$

E_3) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

Cum $x \in [0;1] \Rightarrow x^{n+1} \geq 0$ și $e^x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{n+1} e^x \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \geq 0 \Rightarrow I_{n+1} \geq 0$ (1)

E_4) $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x$

Cum $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^{n+1} \leq 1$

$\Rightarrow x^{n+1} e^x \leq e^x \mid \int_0^1 \ldots dx$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq e - 1$ (2)

E_5) Din (1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq e - 1 \Leftrightarrow$

$1 \leq (n+1) I_n \leq e$