Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\frac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1 & 2\\ 2 & x & 1\\ 1 & y & x\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.

Arătați că $n=(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}$ este natural

E1) $n=(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}$

$n=5-2\sqrt{5}+1+2\sqrt{5}$

$n=6 \in \mathbb{N}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 / anul 2013 / model / I 2

$m = ?$ pt care $G_f \cap Ox$ în 2 puncte distincte,

$f(x) = x^2 + mx + 4$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 7 pct I/2

$E_1)$ $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow x^2 + mx + 4 = 0$ are 2 ($f(x) = 0$) rădăcini distincte

$E_2)$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0$

$E_3)$ ec. atașată : $m^2 - 16 = 0 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

m		-4		4	
m^2-16	$+ + 0$		$- - - - 0$		$+ + +$

$E_4)$ $m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

T114
I/3

Rezolvați: $\log_2(2-x^2) = \log_2 x$

E_1) Cond: $\begin{cases} 2-x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

E_2) $2-x^2 > 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$2-x^2$	$---$	0	$+++$	0	$---$

$2-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = I_1$

E_3) $x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty) = I_2$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (0, \sqrt{2}) = I_c$

E_4) $\log_2(2-x^2) = \log_2 x \Rightarrow 2-x^2 = x$

$\Leftrightarrow 2 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $\begin{cases} 1 \in I_c \\ -2 \notin I_c \end{cases}$

E_5) Soluție: $x = 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Se cere probabilitatea ca alegând o smț. a mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element

---

E1) $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

E2) nr. caz posibile: nr. de smț ale mț. A care este $2^n \Rightarrow 2^7 = 128$

E3) nr. caz favorabile: smț favorabile sunt $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \dots; \{7\} \Rightarrow 8$

E4) $P = \dfrac{8}{128} = \dfrac{1}{16}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 (BAC 2013) ... 12 5 T4 3.5

$\vec{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$; $\vec{BC} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.

Se cere lungimea lui AC

E1) lung. $AC = |\vec{AC}|$

E2) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (\vec{i} + 6\vec{j}) + (4\vec{i} + 6\vec{j}) =$

$= 5\vec{i} + 12\vec{j}$

E3) $|\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

Prof. Ovidiu Badescu

Mihai [illegible] 6

$a+b=\frac{\pi}{3}$, să se arate: $2\cos b = \cos a + \sqrt{3}\sin a$

$E_1)$ $a+b=\frac{\pi}{3} \Rightarrow b=\frac{\pi}{3}-a$

$E_2)$ $2\cos b = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-a\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos a + \sin\frac{\pi}{3}\sin a\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\right) = \cos a + \sqrt{3}\sin a$

Prof. Ovidiu Badescu

7114
II 10)

Fie $\Delta(x,y)$ determinantul matricii

$A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}$. Calculați $D(-1;2)$

E1) $D(-1;2)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+8+2+2+2$

$= 14$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}$, determinați 744 II 4b)

numărul real z pentru care matricea $A(z,z)$ are rangul 2

$E_1)$ $A(z,z)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & z & 2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ rang $A(z,z)=2 \Rightarrow \det A(z,z)=0$ și există un minor de ord. II nenul

$E_3)$ există $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4-2=2\neq 0$, rămâne doar condiția $\det A(z,z)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & z & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8+1+4z-4-2z-4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2z+1=0 \Rightarrow 2z=-1 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $D(x,y)$ determinantul matricii

$A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}$. Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale cu $x \neq y$ pentru care $D(x,y)=D(y,x)$

$E_1)\ D(x,y)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{vmatrix} = x^3+1+4y-2x-xy-2x = x^3-4x-xy+4y+1$

$E_2)\ D(y,x)=\begin{vmatrix} y & 1 & 2 \\ 2 & y & 1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = y^3+1+4x-2y-xy-2y = y^3-4y-xy+4x+1$

$E_3)\ D(x,y)=D(y,x) \Rightarrow$

$x^3-4x-xy+4y+1=y^3-4y-xy+4x+1$

$\Leftrightarrow x^3-y^3-8(x-y)=0$

$E_4)\ (x-y)(x^2+xy+y^2)-8(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-8)=0$

$E_5)$ trebuie să găsim o pereche (x,y) cu $x \neq y$

$\Leftrightarrow$ trebuie să găsim o pereche (x,y) cu

$x^2+xy+y^2-8=0$

Fie $x=0 \Rightarrow y^2=8 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2}$

Există așadar perechea $(0;2\sqrt{2})$ care verifică $D(x,y)=D(y,x)$ și $x \neq y$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + X - m$, determinați m astfel încât restul împărțirii lui f la $X-1$ să fie egal cu 8

7.4 II 2a)

E_1) restul $f : (X-\alpha)$ este $f(\alpha) \Rightarrow$ restul lui $f:(X-1)$ este $f(1)$

E_2) Dar, restul este $8 \Rightarrow f(1) = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+1-m = 8 \Rightarrow -m = 6 \Rightarrow m = -6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X - m$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. II 2 b)

Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, $\forall m \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

$E_2)$ $S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$E_3)$ $(S_1)^2 - 2S_2 = 0^2 - 2 = -2 \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + X - m$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

În cazul $m = 2$, determinați patru numere întregi a, b, c, d cu $a > 0$ astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$

$E_1)$ $m = 2 \Rightarrow f = X^3 + X - 2$

$E_2)$ Dacă f are rădăcina $x = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 0$ Evident $\alpha \neq 0$, deci deîn

$\Rightarrow \alpha^3 + \alpha - 2 = 0.$

$\alpha^3 + \alpha - 2 = 0 \mid : \alpha^3 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} = 0 \mid \cdot(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1 = 0$, adică $\frac{1}{\alpha}$ verifică ecuația $2X^3 - X^2 - 1 = 0$

$E_3)$ Așadar, $\forall$ rădăcină x_1, x_2, x_3 a $f = X^3 + X - m$ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ rădăcină pentru $g = 2X^3 - X^2 - 1$,

așadar $a = 2 > 0$, $b = -1$, $c = 0$ și $d = -1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$

Calculați $f'(0)$

$E_1)$ $f(x) = e^x - x \Rightarrow f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$

$E_2)$ $f'(0) = e^0 - 1 \Rightarrow f'(0) = 1 - 1 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$. Arătați că (1914 II 16)
$\forall n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$, ec. $f(x)=n$ are exact o soluție
în $(0;\infty)$.

E1) $f(x)=n \Rightarrow e^x-x=n \Rightarrow e^x-x-n=0$

E2) $g:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x-x-n$

E3) Folosim șirul lui Rolle

$g'(x)=(e^x-x-n)'=e^x-1$

$g'(x)=0 \to e^x=1 \Rightarrow x=0\notin D_g$

E4)

x	$(0$	∞
g'		
g	$1-n$	

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(e^x-x-n)\overset{\infty-\infty}{=\!=}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{n}{e^x}\right)$

$\overset{\infty(1-0-0)}{=\!=} \infty$

E5) șirul Rolle: $(\operatorname{sgn}(1-n);+)$

$n\geq 2 \to 1-n<0 \to$ șirul Rolle $(-;+)$

$\Rightarrow$ exact o rād. reală

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$, știm că ecuația $f(x) = n$ are o unică soluție $\in (0, \infty)$, arătați că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

E_1) x_n este soluție pentru $f(x) = n \Rightarrow f(x_n) = n$

$\Rightarrow e^{x_n} - x_n = n \Rightarrow e^{x_n} = x_n + n$

E_2) Deoarece ambii membrii sunt pozitivi, avem voie să logaritmăm $\Rightarrow e^{x_n} = x_n + n \mid \ln(\cdots)$

$\Rightarrow \ln e^{x_n} = \ln(x_n + n)$

$\Rightarrow x_n \ln e = \ln(x_n + n)$

$\Rightarrow x_n = \ln(x_n + n)$

E_3) Dar, x_n pozitiv $\Rightarrow \ln(x_n + n) > \ln n$

$\Rightarrow x_n > \ln n$, trecem la limită

$\Rightarrow \lim\limits_n x_n \geq \lim\limits_n \ln n = \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_n x_n = \infty$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și S aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=\frac{\pi}{2}$. Calculați aria lui S

$E_1)$ $\mathcal{A}=\int_0^{\pi/2}|f(x)|dx=\int_0^{\pi/2}|\cos x|dx$

$E_2)$ $x\in[0;\pi/2]\Rightarrow\cos x\geq 0\Rightarrow\mathcal{A}=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$

$E_3)$ $\mathcal{A}=-\sin x\Big|_0^{\pi/2}=-\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=$

$=-(1-0)=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați volumul corpului obținut prin rotirea Gf în jurul lui Ox unde

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ pentru $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$E_1)\ V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$

$E_2)$ folosind $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\Rightarrow$

$E_3)\ V=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/2}1\,dx+\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx\right)$

$=\frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)=$

$=\frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right)=$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)\right)=$

$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}(0-0)\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi^2}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Demonstrați că: $\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$

$E_1)$ $I = \int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos(kx))^n\,dx$

$E_2)$ notăm $t = kx \mid (\,)' \Rightarrow dt = k \cdot dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$; $\quad x = 2\pi \to t = 2k\pi$

$E_3)$ $I = \int_0^{2k\pi} (\cos t)^n \cdot \frac{dt}{k} = \frac{1}{k} \cdot \int_0^{2k\pi} (\cos t)^n\,dt$

$E_4)$ $\int_0^{2k\pi} (\cos t)^n\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos t)^n\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} (\cos t)^n\,dt + \dots$

$+ \int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} (\cos t)^n\,dt$

$E_5)$ Dar, $\int_{2\pi}^{4\pi} (\cos t)^n\,dt \xrightarrow[dt = du]{u = t - 2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u)^n\,du$ și

analog, fiecare din integralele $\int_{4\pi}^{6\pi} (\cos t)^n\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos u)^n\,du$

$\dots, \int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} (\cos t)^n\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos u)^n\,du$

$E_6)$ sunt în total k integrale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{2k\pi} (\cos t)^n\,dt = \frac{1}{k} \cdot k \cdot \int_0^{2\pi} (\cos t)^n\,dt$ Q.e.d.

Prof. Ovidiu Badescu