Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul $a=\log_3 2$. Arătați că $\log_3 6=1+a$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(0,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1)-\log_2(x+3)=-1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,30\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(4,-1)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că O este mijlocul segmentului (AB).

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=6$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$ și se notează cu A matricea sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det A=-a^2+5a-6$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale numărului a pentru care matricea A este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f=mX^5+nX$, cu $m,n\in\mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Determinați $n\in\mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1})=m$.

5p **b)** Pentru $m=\hat{1}$ și $n=\hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului f.

5p **c)** Arătați că, dacă $f(\hat{1})=f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3})=f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2\sqrt{x+1}\cdot f(x)\,dx$.

5p **c)** Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

V114
I/1

Se știe că $a = \log_3 2$, să se arate că

$$\log_3 6 = 1 + a$$

E_1) $\log_3 6 = \log_3 (2 \cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 =$

$= \log_3 2 + 1$

E_2) Dar, din ipoteză $\log_3 2 = a$

$\Rightarrow \log_3 6 = a + 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $A(0;1)$ aparține $\frac{V114}{I/2}$
G_f unde $f(x) = x^2 - 2x + m - 3$

E_1) TEORIE: $A(x_A, y_A) \in G_f \Leftrightarrow f(x_A) = y_A$

E_2) în cazul nostru, $A(0;1) \in G_f \Leftrightarrow f(0) = 1$

E_3) $f(0) = 1 \Rightarrow 0^2 - 2 \cdot 0 + m - 3 = 1$

$\Rightarrow m - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{m = 4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V114
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_2(x+1) - \log_2(x+3) = -1$$

E_1) Cond: $\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x \in (-1,\infty) = I_1 \\ x+3>0 \Rightarrow x \in (-3,\infty) = I_2 \end{cases}$

$$I_C = I_1 \cap I_2 = (-1,\infty)$$

E_2) Folosim $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$

$\Rightarrow$ ec.: $\log_2 \frac{x+1}{x+3} = -1$

E_3) Folosim $\log_b A = N \Rightarrow A = b^N$

în cazul nostru $\frac{x+1}{x+3} = 2^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(x+1) = x+3$$

$$\Rightarrow 2x+2 = x+3 \Rightarrow x = 1 \in I_C$$

$\Rightarrow x = 1$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

V114
I/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr din $\{1;2;3;\dots;30\}$, acesta să fie divizibil cu 7

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : 30 (toate numerele din mulțime)

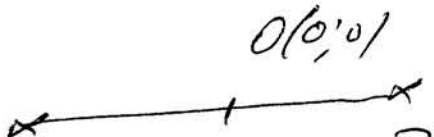
$E_3)$ nr caz favorabile : toate numerele divizibile cu 7 adică 7; 14; 21; 28

$\Rightarrow$ 4 favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}$

Prof. Ovidiu Bădescu

În reperul xOy, fie A(4;-1). Determinați coordonatele lui B dacă O este mijlocul lui AB



$E_1)$ O mijl lui AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

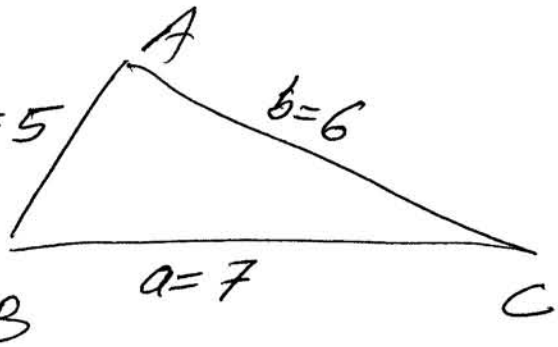
$$E_2) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{4 + x_B}{2} \Rightarrow 4 + x_B = 0 \Rightarrow x_B = -4 \\ 0 = \frac{-1 + y_B}{2} \Rightarrow -1 + y_B = 0 \Rightarrow y_B = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B(-4; 1)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $\cos A$ dacă $AB=5, AC=6, BC=7$ VIII 4 I/6

E_1) T. cosinusului



$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

E_2) $49 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos A$

$49 = 61 - 60\cos A$

$\Rightarrow 60\cos A = 12 \Rightarrow \cos A = \frac{12}{60}$

$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/114
II 1a)

Fie $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$. Arătați că

$$\det A = -a^2+5a-6$$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} =$

$= 9a+12+2a^2-4a-3a^2-18$

$= -a^2+5a-6$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 4

Fie $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$ și A matricea sa. II 1 b)

Determinați valorile lui a pentru care A este inversabilă

$E_1)$ A inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$E_2)$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} = 9a+12+2a^2-4a-3a^2-18 =$

$= -a^2+5a-6$

$E_3)$ $\exists A^{-1} \Leftrightarrow -a^2+5a-6 \neq 0$

$E_4)$ $-a^2+5a-6=0 \mid \cdot(-1)$

$a^2-5a+6=0$

$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$

$E_5)$ Deci, $\det A \neq 0$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V114

Fie $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$ și A matricea sa. II 1c)

Dacă $a=1$, rezolvați sistemul

$E_1)$ $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=1 \\ 4x+y+9z=1 \end{cases}$.

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9+12+2-4-3-18 =$
$= 23-25 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ folosim CRAMER

$E_3)$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9+3+1-1-3-9 = 0$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 9+12+2-4-18-3 =$
$= 23-25 = -2$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+4+2-4-1-2 = 0$

$E_4)$ $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{0}{-2} = 0$; $y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{-2}{-2} = 1$; $z = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

V114

Fie $\mathbb{Z}_5[X]$ și $f = mX^5 + nX$ cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$ II 2a)

Se cere $n \in \mathbb{Z}_5$ dacă $f(\hat{1}) = m$

$E_1)$ $f(\hat{1}) = m \Rightarrow m \cdot \hat{1} + n \cdot \hat{1} = m$

$\Rightarrow m + n = m$

$\Rightarrow n = \hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 114
II 26)

Fie $f = mX^5 + nX$ cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$.

Pentru $m = \hat{1}$ și $n = \hat{4}$, să se afle rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale lui f

---

$E_1)$ $m = \hat{1}$, $n = \hat{4} \Rightarrow f = X^5 + \hat{4}X$

$E_2)$ Rt a găsi rădăcinile, înlocuim toate valorile din $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

$x = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{0}) = \hat{0}^5 + \hat{4} \cdot \hat{0} = \hat{0} \Rightarrow$ OK.

$x = \hat{1} \Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{1}^5 + \hat{4} \cdot \hat{1} = \hat{1} + \hat{4} = \hat{5} = \hat{0} \Rightarrow$ OK

$x = \hat{2} \Rightarrow f(\hat{2}) = \hat{2}^5 + \hat{4} \cdot \hat{2} = \hat{32} + \hat{8} = \hat{2} + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow$ OK

$x = \hat{3} \Rightarrow f(\hat{3}) = \hat{3}^5 + \hat{4} \cdot \hat{3} = \hat{243} + \hat{12} = \hat{3} + \hat{2} = \hat{0} \Rightarrow$ OK

$x = \hat{4} \Rightarrow f(\hat{4}) = \hat{4}^5 + \hat{4} \cdot \hat{4} = \hat{1024} + \hat{16} = \hat{4} + \hat{1} = \hat{0} \Rightarrow$ OK

$E_3)$ rădăcinile lui f sunt

$\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$

Prof. Ovidiu Badescu

I/114
II 2e)

Fie $f = mx^5 + nx$ cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$

Dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$

$E_1)$ $f(\hat{1}) = f(\hat{2}) \Rightarrow m + n = \hat{32}\, m + \hat{2} n$

$\Rightarrow m + n = \hat{2} m + \hat{2} n$

$\Rightarrow m + n = \hat{0} \Rightarrow m = -n$

$E_2)$ $f(\hat{3}) = m \cdot \hat{3}^5 + n \cdot \hat{3} = \hat{243} m + \hat{3} n =$

$= \hat{3} m + \hat{3} n \overset{\text{înlor}}{=\!=} \hat{3}(-n) + \hat{3} n = \hat{0}$

$f(\hat{4}) = m \cdot \hat{4}^5 + n \cdot \hat{4} = \hat{1024}\, m + \hat{4} n =$

$= \hat{4} m + \hat{4} n \overset{\text{înlor}}{=\!=} -\hat{4} n + \hat{4} n = \hat{0}$

$E_3) \Rightarrow f(\hat{3}) = f(\hat{4})$

Prof. Ovidiu Badescu

V114
III 1-a)

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$

Se cere $f'(x)$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x-1}{x+1}\right)'=$

$=\dfrac{(x^2-x-1)'(x+1)-(x^2-x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=$

$=\dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}$

E2) $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x-x-1-x^2+x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/114
III 16)

Fie $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x+1}$, calculați

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot \ln x}{x^2-x-1}$$

E1) $$l=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-x-1}{x+1}\cdot \ln x}{x^2-x-1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-1}{x+1}\cdot \ln x \cdot \frac{1}{x^2-x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$, să V114 III 1c)

se scrie ec. asimptotei oblice spre ∞ a G_f

E_1) <u>as. oblică spre ∞</u> : $y=mx+n$ unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x-1}{x+1}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2+x}\ \overset{\text{gr.n}=\text{gr.}\S}{=\!=}\ \frac{1}{1}=1\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x+1}-\frac{x+b}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-x-1-\cancel{x^2}-x}{x+1}\ \overset{\frac{-1}{\infty}}{=\!=}\ 0$$

E_2) as. : $y=mx+n\Rightarrow y=x+0$

$$\Rightarrow y=x$$

Prof. Ovidiu Bagescu

V/114
III 2 a)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

Se cer primitivele lui $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$

E) Primitivele lui g sunt

$$\int g(x)\,dx=\int\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{e^x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$=\int e^x\,dx=e^x+C$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V114
III 26)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$

Calculați $\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)\,dx$

E2) $I=\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot e^x\sqrt{x+1}\,dx$

$=\int_1^2 (x+1)e^x\,dx$

E2) $f(x)=x+1 \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$

$I=(x+1)e^x\Big|_1^2-\int_1^2 1\cdot e^x\,dx=$

$=3e^2-2e-e^x\Big|_1^2=$

$=3e^2-2e-(e^2-e^1)$

$=3e^2-2e-e^2+e$

$=2e^2-e$

Prof. Ovidiu Badescu

V114
II 2c)

Calculați aria dintre G_h, axa Ox și dreptele $x=2$ și $x=3$ unde $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$

$E_1)$ $\mathcal{A}=\int_2^3 |h(x)|\,dx=$

$=\int_2^3 |e^{-x}\cdot e^{x}\sqrt{x+1}|\,dx$

$=\int_2^3 |\sqrt{x+1}|\,dx$

$E_2)$ $x\in[2,3]\Rightarrow\sqrt{x+1}\geq 0\Rightarrow$

$\mathcal{A}=\int_2^3 \sqrt{x+1}\,dx$

$E_3)$ $t=x+1\ |\ (\,)'\Rightarrow dt=dx$

$x=2\Rightarrow t=\sqrt{3}$; $x=3\Rightarrow t=\sqrt{4}=2$

$I=\int_{\sqrt{3}}^{2}\sqrt{t}\,dt=\int_{\sqrt{3}}^{2} t^{\frac{1}{2}}dt=$

$=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=$

$=\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{2}{3}(\sqrt{8}-\sqrt{\ })$

Prof. Ovidiu Badescu