Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.

5p **4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că A este mijlocul segmentului (OB).

5p **6.** Determinați măsura x a unui unghi ascuțit, știind că $\frac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ln x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul f se divide cu $X-1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

Arătați că

$$2^{-1}+2^{-2}=0,75$$

E_1) Folosim $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$

E_2) $2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

E_3) $0,75=\frac{75^{:25}}{100}=\frac{3}{4}$

egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația

$$\frac{2}{x-3} < 0$$

E_1) tabel de semne

x			3	
2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2}{x-3}$	$-$	$\nexists$	$+$	$+$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

E_2 | Pt ca $\frac{2}{x-3} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$

$S_f : x \in (-\infty, 3)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+2} = x+2$$

$E_1)$ Cond.: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, \infty) = I_1 \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2 = [-2, \infty)$

$E_2)$ $\sqrt{x+2} = x+2 \mid (\,)^2$

$x+2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x+2 = x^2+4x+4$

$x^2+3x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow -1 \in I_c \\ \searrow -2 \in I_c \end{matrix}$

$E_3)$ $S_f : x \in \{-2, -1\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Se depune 900 lei cu p% dobândă pe an. Se cere p dacă, după un an, suma este de 1008 lei

---

E_1) după 1 an: $900 + \frac{p}{100} \cdot 900 = 1008$

$\Rightarrow 900 + 9p = 1008$

E_2) $9p = 1008 - 900$

$9p = 108 \Rightarrow p = \frac{108}{9} = 12$

Prof. Ovidiu Bădescu

V112

$O(0;0)$, $A(2;3)$. Se cer coordonatele lui B dacă A mijlocul lui OB



E_1) A mijl lui OB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_O + x_B}{2} \\ y_A = \dfrac{y_O + y_B}{2} \end{cases}$$

E_2) ~~$\begin{cases} x_A = \dfrac{0+2}{2} = 1 \\ y_A = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$~~

E_2) $\begin{cases} 2 = \dfrac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_B = 4 \\ 3 = \dfrac{0 + y_B}{2} \Rightarrow y_B = 6 \end{cases} \Rightarrow B(4;6)$

Prof. Ciucu Bădescu

Determinați măsura x a unui unghi ascuțit dacă $\frac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5$

E_1) $\frac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x + 4\cos x = 5\cos x$

$\sin x = \cos x$

E_2) Din $\sin x = \cos x \mid :\cos x$

$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\, x = 1$, $x \in C_I$

$\Rightarrow x = 45^\circ$

$\exists$ mod II: $\frac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{4\cos x}{\cos x} = 5$

$\Rightarrow tg\, x + 4 = 5 \Rightarrow tg\, x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $H(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, arătați că $\det(H(x))=1, \forall x\in(0;\infty)$

E1) $\det H(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$

$=1+0+0-0-0-0$

$=1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $H(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$, determinați

$a\in\mathbb{R}$, $a>0$ cu $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, $\forall x>0$

$E_1)$ $H(x)\cdot H(a)=H(x)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$E_2)$ $\ln a+\ln x=\ln x$

$\Rightarrow \ln a=0\Rightarrow a=e^0$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $H(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

calculați determinantul matricii

$H(1)+H(2)+\dots+H(2012)$

E1) Fie $M=H(1)+H(2)+\dots+H(2012)$

$\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln 2012 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln 1+\ln 2+\dots+\ln 2012 \\ 0 & 0 & 2012 \end{pmatrix}$

E2) $M=\begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(1\cdot 2\cdot\dots\cdot 2012) \\ 0 & 0 & 2012 \end{pmatrix}$

E3) $\det M=2012^3+0+0-0-0-0$

$=2012^3$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$

Arătați că f se divide cu $X-1$

E_1) f se divide cu $(x-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(a) = 0$

E_2) f se divide cu $(x-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ (?)

E_3) $f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 1$

$f(1) = 4 - 4 \Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow f \vdots (x-1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

E1) Formula $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$

E2) $S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$

$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$

E3) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) =$

$= 9 + 6 = 15$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$ cu rād.
x_1, x_2, x_3. Verificați dacă
$(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = 13$

E_1) pentru orice polinom există descomp.
$f = a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ unde
a este coef. term de grad maxim

E_2) $f = 1(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$

E_3) Rf a calcula $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$,
calculăm $f(2)$ pt că

$f(2) = (2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$

E_4) $f(2) = 2^3 + 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 1$

$= 8 + 12 - 6 - 1$

$= 13$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$, arătați că

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$$

$E_1)\ \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$

$E_2)\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$

$E_3)\ f'(x)=\left(\sqrt{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$, arătați că f este crescătoare pe $(4;\infty)$

E1) pt a arăta că f crescătoare arătăm că $f'(x)\geq 0$

E2) $f'(x)=\left(\sqrt{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$ $\quad \sqrt{x}/2,\ 1$

Deoarece $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{x^2}=x$

$\Rightarrow$ numitorul comun este ~~$2x$~~

E3) $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$

E4) $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$

E5)

x	$(4$	
f'		$+\ +\ +\ +\ +$
f		$\nearrow$

$f'(5)=\frac{\sqrt{5}-2}{2\cdot 5}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(4;\infty)$

$\Rightarrow f\nearrow$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$

Determinați ec. asimpt verticale la G_f

E1) <u>as. verticale</u> se calculează în capetele deschise și finite ale D_f, în cazul nostru în $x=0$

E2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sqrt{x}-\ln x) =$

$\underline{\underline{0-(-\infty)}}\ \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0$ as. vert. la dreapta

<u>TEORIE</u>: $\ln 0 \longrightarrow -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln \infty \to \infty$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = x \cdot e^x$, arătați că F este o primitivă a lui f unde

$$F(x) = xe^x - e^x + 2012$$

E1) F primit. pt $f \Leftrightarrow$

$$F'(x) = f(x)$$

sau

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

E2) În cazul nostru folosim $F'(x) = f(x)$

E3) $F'(x) = (xe^x - e^x + 2012)' =$

$$= (x \cdot e^x)' - (e^x)' + 0 =$$

$$= x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' - e^x =$$

$$= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x = f(x)$$

E4) $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F$ primit pt f

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = x e^x$, calculați

$$\int_1^e f(\ln x)\,dx$$

$E_1)$ $I = \int_1^e f(\ln x)\,dx =$

$= \int_1^e (\ln x \cdot e^{\ln x})\,dx$

$E_2)$ Folosim $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\Rightarrow e^{\ln x} = x^{\ln e} = x^1 = x$

$E_3)$ $I = \int_1^e (\ln x) \cdot x\,dx = \int_1^e x \cdot \ln x\,dx$

$E_4)$ părți: $f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x}$

$g' = x \Rightarrow g = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$E_5)$ $I = (\ln x) \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,dx =$

$= (\ln e)\frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

Prof. Ovidiu Badescu

VII2

Fie $f(x) = xe^x$ și $g:[1,2] \to \mathbb{R}$,

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Determinați volumul

corpului obținut prin rotirea în jurul lui Ox

a graficului lui g

$E_1)\ V = \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$

$E_2)\ g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{xe^x}{x} = e^x$

$E_3)\ V = \pi \int_1^2 (e^x)^2\,dx = \pi \int_1^2 e^{2x}\,dx$

$E_4)$ Folosim $\int e^{\varphi(x)}\,dx = \frac{e^{\varphi(x)}}{\varphi'(x)}$

$E_5)\ V = \pi \cdot \frac{e^{2x}}{(2x)'}\Big|_1^2 = \pi \cdot \frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2 =$

$= \frac{\pi}{2}(e^4 - e^2)$

Prof. Ovidiu Bădescu