Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Ordonaţi crescător numerele $\sqrt{12}, 2\sqrt{2}$ şi 3.

5p **2.** Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.

5p **3.** Se consideră funcţiile $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x+1)$ şi $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$, $g(x)=2^x-1$. Calculaţi $f(g(1))$.

5p **4.** Numărul submulţimilor cu două elemente ale unei mulţimi este egal cu 10. Determinaţi numărul elementelor mulţimii.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(5,1)$, $B(3,5)$. Calculaţi lungimea medianei din vârful O în triunghiul OAB.

5p **6.** Se consideră triunghiul MNP cu $MP=6$, $\sin N=\frac{3}{5}$ şi $\sin P=\frac{4}{5}$. Calculaţi lungimea laturii (MN).

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătaţi că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.

5p **c)** Pentru $m=1$, arătaţi că $y_1^2=x_1\cdot z_1$, unde (x_1,y_1,z_1) este soluţia sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=0$, calculaţi restul împărţirii polinomului f la $X-1$.

5p **b)** Arătaţi că polinomul f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculaţi I_1.

5p **b)** Arătaţi că $I_n+I_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{4026}\le I_{2012}\le\frac{1}{2013}$.

Prof. Cătălin Bănescu

M 2 / N 3
I / 1

Ordonați crescător: $\sqrt{12}$; $2\sqrt{2}$ și 3

$E_1)$ $a = \sqrt{12}$

$b = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

$c = 3 = \sqrt{9}$

și cum $8 < 9 < 12$

$\Rightarrow \sqrt{8} < \sqrt{9} < \sqrt{12}$

$\Rightarrow b < c < a$

$E_2)$ $2\sqrt{2} < 3 < \sqrt{12}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

M.c/V
IIc

E1) $x+y=5 \Rightarrow y=5-x$

$xy=6 \Rightarrow x(5-x)=6 \Rightarrow 5x-x^2=6$

$\Rightarrow x^2-5x+6=0$

E2) $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 1}{2}\begin{matrix}3\\2\end{matrix}$

E3) $x_1=3$ și $x+y=5 \rightarrow y_1=2$

$x_2=2$ și $x+y=5 \Rightarrow y_2=3$

E4) $(x,y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/U3
I/3

Fie $f(x)=\log_2(x+1)$ și $g(x)=2^x-1$

Se cere $f(g(1))$

E: $f(g(1))=f(2^1-1)=f(1)=\log_2 2=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei XII/V3
mulțimi este 10, se cere nr. elem. mulțimii I/4

E_1) nr. submulțimi cu 2 elemente ale o mulțime cu n elemente este $C_n^2 \Rightarrow C_n^2 = 10 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Rightarrow n^2 - n = 20 \Rightarrow$$

$$n^2 - n - 20 = 0$$

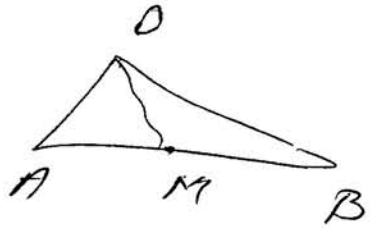
$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 9}{2} \begin{matrix} 5 \\ -4 \end{matrix}$$

E_2) nr. de elemente este natural $\Rightarrow \boxed{n = 5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M12/V3
I/5

Fie $O(0,0)$, $A(5,1)$, $B(3,5)$, se cere lungimea medianei din O în ΔOAB



E_1) Fie M mijl lui AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(4;3)$$

E_2) lung lui OM este $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} =$

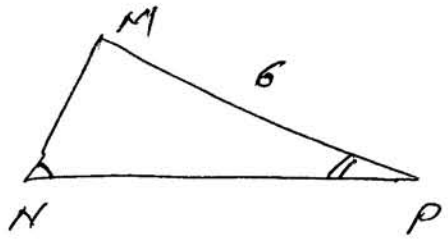
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2
03/2016

În $\triangle MNP$, $MP=6$, $\sin N=\frac{3}{5}$; $\sin P=\frac{4}{5}$,

se cere MN



Fie din T. sinusurilor

$$\Rightarrow \frac{MN}{\sin P}=\frac{NP}{\sin M}=\frac{MP}{\sin N} \Rightarrow \frac{MN}{\frac{4}{5}}=\frac{6}{\frac{3}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN\cdot\frac{3}{5}=6\cdot\frac{4}{5} \Rightarrow MN=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow MN=8$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M 2
V 3 / Final

Fie $\begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ 2x - my - 3z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$

Arătați că suma elementelor de pe diag. princ. a matricii este 2

$E_1)$ $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & -m & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ suma elem. de pe diag. pp este

$$m + (-m) + 2 = 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M 2/13
II 16)

Fie $\begin{cases} mx - 2y + z = 1 \\ 2x - my - 3z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$

Găsiți m dacă $\det A \neq 0$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & -m & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m^2 + 6 - 2 + m - 3m + 8 =$

$= -2m^2 - 2m + 12$

E2) $\det A = 0 \Rightarrow -2m^2 - 2m + 12 = 0 \mid :(-2)$

$m^2 + m - 6 = 0$

$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

E3) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

Prof. Ovidiu Radescu

Fie $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-2y+2z=4 \end{cases}$ (4;2;1) M2/U3 I 1c)

Pb $m=1$, sa se arate: $y_1^2 = x_1 \cdot z_1$ unde (x_1, y_1, z_1) e solutia sistemului

---

$E_1)$ $m=1 \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+6-2+1-3+8 =$

$= -7+15 = 8 \neq 0$

$E_3)$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+24-3+4-3+12 =$

$= 40-8 = 32$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6-3+8-3+12-4 =$

$= 26-10 = 16$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4-6-2+1+3+16 =$

$= 20-12 = 8$

$E_4)$ $x_1 = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{32}{8} = 4$; $y_1 = \frac{16}{8} = 2$; $z_1 = \frac{8}{8} = 1$

$E_5)$ $y_1^2 = 2^2 = 4$

$x_1 \cdot z_1 = 4 \cdot 1 = 4$ $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Badescu

M 3/V 5
(2 20)

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, $m \neq 0$
să se afle restul lui $f : (x-1)$

E1) $m = 0 \Rightarrow f = X^3 + 1$

E2) restul $f : (x-\alpha)$ este $f(\alpha) \Rightarrow$ restul lui $f : (x-1)$ este $f(1)$ adică $\boxed{f(1) = 2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M 2/N; II 2 b)

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, arătați că $f \vdots (x+1)$, $\forall m \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $f \vdots (x+1) \Leftrightarrow f(-1) = 0$

$E_2)$ $f(-1) = -1 + m - m + 1 = 0 \Rightarrow f \vdots (x+1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/V3
II 2c)

Fie $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, să se afle că $f : (X+1)$, $\forall m \in \mathbb{R}$, găsiți m dacă f are trei rădăcini reale

---

E_1) Din $f : (X+1) \Leftrightarrow f(-1) = 0$ deci o rad. este $x_1 = -1$, Facem Horner

E_2)

	X^3	X^2	X	X^0
	1	m	m	1
-1	1	$-1+m$	$1-m+m=1$	0

$\Rightarrow f = (X+1)(1 \cdot X^2 + (m-1)X + 1)$

E_3) rad. lui f se obțin din $X+1=0 \Rightarrow x_1 = -1$ și din $X^2 + (m-1)X + 1 = 0$ de care $\Delta \geq 0$

$\Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0$

$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$

m		-1		3	
m^2-2m-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$, arătați că $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+2)^2}$

$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{2x^2-1}{x^2+2}\right)'=\frac{4x(x^2+2)-(2x^2-1)2x}{(x^2+2)^2}=$

$$=\frac{4x^3+8x-4x^3+2x}{(x^2+2)^2}=\frac{10x}{(x^2+2)^2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}$, să se ec. asimpt orizontale spre ∞ ale G_f

---

$E_1)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})}=2\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=2$ as. oriz spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$, se știe că $f'(x)=\frac{10x}{(x^2+2)^2}$ (M12/V3 II 1c)

să se arate $-\frac{1}{2}\leq f(x)\leq \frac{1}{3}$, $\forall x\in[0;1]$

E1) Facem tabel de variație:

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

E2)

x		0		1
f'	$-$	0	$+$	
f	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

$f(0)=\frac{0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$; $f(1)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$

Din tabel $\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq f(x)\leq \frac{1}{3}$, $\forall x\in[0;1]$

Prof. Ovidiu Bădescu

M12/U3
II'29)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, calculați I_1

E,) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$

$= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x\Big|_0^1 - \frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_0^1 =$

$= (1-0) - (\ln 2 - \ln 1) = 1 - \ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/V3
II/261

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, a.c.a.

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

E1) $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, arătați că

$$\frac{1}{4026} \leq I_{2012} \leq \frac{1}{2013}$$

E_1) <u>monotonia</u>: $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx$$

Dar, $x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x^n \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x+1} \leq 0 \Big| \int_0^1 \ldots dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x+1}\,dx \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

E_2) $I_{n+1} \leq I_n \Big| + I_n \Rightarrow I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \Rightarrow \text{pt } n = 2012 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2013} \leq 2I_{2012} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4026} \leq I_{2012}} \quad (1)$$

E_3) din $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ și $I_{n+1} \geq 0$

$$\Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \text{pt } n = 2012 \Rightarrow \boxed{I_{2012} \leq \frac{1}{2013}} \quad (2)$$

E_4) din (1) + (2) $\Rightarrow \frac{1}{4026} \leq I_{2012} \leq \frac{1}{2013}$

Prof. Ovidiu Badescu