INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL
EDUCAŢIEI
NAŢIONALE

VARIANTA 2

SIMULAREA 2012

SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT
Matematică *M_ŞTIINŢE ALE NATURII*

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Se consideră progresia aritmetică de raţie 2 cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$. Să se arate că vârtful parabolei asociate funcţiei f se află pe dreapta $x+y=7$.
3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\lg x+\lg(9-2x)=1$.
4. Să se calculeze $C_{100}^{3}-C_{100}^{97}$.
5. Se consideră vectorii $\vec{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ cu $a\in\mathbb{R}$. Să se determine valorile lui a pentru care vectorii $\vec{v_1}$ şi $\vec{v_2}$ sunt coliniari.
6. Fie $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin a=\frac{4}{5}$. Să se calculeze $tg\frac{a}{2}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a. Să se calculeze $\det(A)$.
b. Să se demonstreze că $A^2-A-2I_3=O_3$.
c. Să se determine A^{-1}

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi ecuaţia $x^3-x+a=0$ cu rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3.

a) Să se rezolve ecuaţia dacă $a=-6$
b) Să se calculeze $x_1x_2x_3$
c) Să se determine valorile lui a pentru care x_1,x_2,x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$.

a. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.
b. Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.
c. Să se determine mulţimea valorilor lui f.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int\frac{nx^n+(n-1)}{x^{n+1}}dx, n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $\frac{nx^n+(n-1)}{x^{n+1}}=\frac{n}{x}+\frac{n-1}{x^{n+1}}$
b) Să se calculeze I_1.
c) Să se calculeze I_2.

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie progr aritm cu $r=2$ și $a_3+a_4=8$

Se cere a_1

$E_1)\ a_n = a_1+(n-1)r \Rightarrow a_3 = a_1+2r$

$a_4 = a_1+3r$

$E_2)\ a_3+a_4=8 \Rightarrow (a_1+2r)+(a_1+3r)=8$

$\Rightarrow 2a_1+5r=8$

$E_3)\ 2a_1,\ r=2 \Rightarrow 2a_1+10=8 \Rightarrow 2a_1=-2$

$\Rightarrow \boxed{a_1=-1}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = x^2 - 4x + 9$, arătați că vârful parabolei este pe dreapta $x + y = 7$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow x_V = -\frac{b}{2a}$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a}$

$E_2)$ $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}{4 \cdot 1} = -\frac{16 - 36}{4} = 5$

$E_3)$ $V(x_V, y_V) \in$ dreptei $x + y = 7 \Leftrightarrow$ cordonatele lui V verifică ec. dreptei

în cazul nostru, $x_V = 2$

$y_V = 5$

$\Rightarrow x_V + y_V = 2 + 5 = 7 \Rightarrow V \in$ dreptei

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\lg x + \lg(9-2x) = 1$$

$E_1)$ $\lg x + \lg(9-2x) = 1$

Cond.: $\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x \in (0,\infty) = I_1 \\ 9-2x > 0 \Rightarrow 2x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{2} \Rightarrow \end{cases}$

$x \in (-\infty, \frac{9}{2}) = I_2$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (0, \frac{9}{2})$

$E_2)$ folosim $\log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y)$

$\Rightarrow$ ec. devine $\lg(x(9-2x)) = 1$

$\Leftrightarrow x(9-2x) = 10 \Leftrightarrow 9x - 2x^2 = 10$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm 1}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{5}{2} \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$E_3)$ Verificăm dacă $x_{1,2} \in I_c = (0, \frac{9}{2}) = (0; 4,5)$

$x_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \in I_c \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$ e soluție

$x_2 = 2 \in I_c \Rightarrow x_2 = 2$ soluție

$S_g: x \in \{2; \frac{5}{2}\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Calculați $C_{100}^{3} - C_{100}^{97}$

E4) $C_{100}^{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{100!}{3! \cdot 97!}$

$C_{100}^{97} = \frac{100!}{97!(100-97)!} = \frac{100!}{97! \cdot 3!}$

E2) $C_{100}^{3} - C_{100}^{97} = \frac{100!}{3! \cdot 97!} - \frac{100!}{97! \cdot 3!} = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\vec{v_1} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v_2} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ coliniare

---

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) În cazul nostru, $\frac{a}{3} = \frac{a+1}{5}$

$\Leftrightarrow 5a = 3(a+1) \Leftrightarrow 5a = 3a + 3$

$\Leftrightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ cu $\sin a = \frac{4}{5}$, să se

$\operatorname{tg} \frac{a}{2}$

E_1) Formula $\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$

E_2) notăm $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\Rightarrow 4(1+t^2) = 10t \Rightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \mid : 2$

$\Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$

E_3) $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \begin{cases} \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

E_4) $\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \{\frac{1}{2}, 2\}$ (1)

E_3) $a \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{a}{2} \in (0, \frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow 0 < \frac{a}{2} < \frac{\pi}{4} \mid \circ \operatorname{tg} \nearrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 0 < \operatorname{tg} \frac{a}{2} < \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \operatorname{tg} \frac{a}{2} < 1$

E_4) Din (1) $\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in \{\frac{1}{2}, 2\} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculați $\det A$

E1) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+(-1)+(-1)-1-1-1$

$= -4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, arătați că

$$A^2-A-2I_3=O_3$$

E1) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1+1+1 & -1-1+1 & -1+1-1 \\ -1-1+1 & 1+1+1 & 1-1-1 \\ -1+1-1 & 1-1-1 & 1+1+1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

E2) $A^2-A-2I_3=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 3-1+2 & -1+1+0 & -1+1+0 \\ -1+1+0 & 3-1-2 & -1+1+0 \\ -1+1+0 & -1+1+0 & 3-1-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2-A-2I_3=O_3$$

Prof. Ovidiu Bănescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculați A^{-1}

E1) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-1-1-1-1-1$

$=-4\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

E2) $A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

E3) $A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{pmatrix}$

unde $a_{11}^*=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(1-1)=0$

$a_{12}^*=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot(-1-1)=2$

$a_{13}^*=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(1+1)=2$

Analog $a_{21}^*=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot(-1-1)=+2$

Și $a_{22}^*=0$ $a_{23}^*=2$ $a_{31}^*=2$; $a_{32}^*=2$; $a_{33}^*=0$

$\Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x^3 - x + a = 0$, rezolvați ec. dacă $a = -6$ în $\mathbb{C}$

$E_1)$ $a = -6 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0$

$E_2)$ $\Delta_{-6} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

$E_3)$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	0	−1	−6
~~1~~	1	1	0	~~−6 ≠ 0~~
2	1	2	3	0

$\Rightarrow (x-2)(1 \cdot x^2 + 2x + 3) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8i^2}}{2} =$

$= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-1 \pm i\sqrt{2})}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$

Prof. Ovidiu Pădacu

Fie $x^3 - x + a = 0$ cu x_1, x_2, x_3 rădăcini.

Calculați $x_1 x_2 x_3$

E_1) ec. $x^3 + 0 \cdot x^2 - x + a = 0$

Din VIETE $\Rightarrow S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$

$S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

$S_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{a}{1} = -a$

E_2) $\boxed{x_1 x_2 x_3 = -a}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x^3 - x + a = 0$ cu $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Se cer valorile reale ale lui a dacă x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi

---

E_1) Din $x^3 - x + a = 0 \Rightarrow x^3 + 0 \cdot x^2 - x + a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -0 = 0 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -1 \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{a}{1} = -a \end{cases}$$

E_2) $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1 \Rightarrow x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -1$

$\Rightarrow (-x_2 - x_3)(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -1$

$\Rightarrow -(x_2 + x_3)^2 + x_2x_3 = -1$

$\Rightarrow -x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + x_2x_3 = -1 \Rightarrow x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 - 1 = 0$

E_3) $x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_{x_2} \geq 0 \Rightarrow x_3^2 - 4(x_3^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x_3^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow 3x_3^2 \leq 4 \Rightarrow x_3^2 \leq \frac{4}{3}$, și $x_3 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x_3 \in \{-1; 0; 1\}$

E_4) $x_3 = -1 \Rightarrow x_2^2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_2 = 0 \xrightarrow{S_1} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \xrightarrow{S_1} x_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a = x_1x_2x_3 = 0$

E_5) $x_3 = 0 \Rightarrow a = x_1x_2x_3 = 0$

E_6) $x_3 = 1 \Rightarrow x_2^2 + x_2 = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_3 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ x_3 = -1 \xrightarrow{S_1} x_1 = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{a = 0}$

Prof. Ovidiu Radescu

Fie $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$, calculați

$$l=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Ex) $l=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^4+3}\overset{grad\,P<grad\,Q}{=\!=\!=}0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$, calculați $f'(x)$

E1) $f'(x)=\left(\frac{x}{x^4+3}\right)'=\frac{x'(x^4+3)-x\cdot(x^4+3)'}{(x^4+3)^2}$

$=\frac{1(x^4+3)-x\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2}=\frac{x^4+3-4x^4}{(x^4+3)^2}=$

$=\frac{3(1-x^4)}{(x^4+3)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x}{x^4+3}$, găsiți mulțimea valorilor lui f

$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{x}{x^4+3}\right)'=\frac{1\cdot(x^4+3)-x\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2}=\frac{3-3x^4}{(x^4+3)^2}$

$E_2)\ f'(x)=0\Rightarrow 3(1-x^4)=0\Rightarrow x^4=1\Rightarrow x=\pm 1$

$E_3)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

$f'(0)=\frac{3-0}{3^2}=\frac{3}{9}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(-1,1)$

$\Rightarrow f_1\nearrow\ pe\ (-1,1)$

$f'(-2)=\frac{3-3\cdot 16}{(16+3)^2}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f_1\searrow pe\ (-\infty,-1)$

$f'(2)=\frac{3-3\cdot 16}{(16+3)^2}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f_1\searrow pe\ (1,\infty)$

$E_4)\ f(-1)=\frac{-1}{1+3}=-\frac{1}{4};\ f(1)=\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^4+3}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^4+3}=0$

$E_5)\ Im\ f=\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\cup\left(0,\frac{1}{4}\right]=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

Prof. Dan I. Badescu

Arătați că $\frac{nx^n+(n-1)}{x^{n+1}} = \frac{n}{x} + \frac{n-1}{x^{n+1}}$

E1) $\frac{nx^n+(n-1)}{x^{n+1}} = \frac{nx^n}{x^{n+1}\cdot x} + \frac{n-1}{x^{n+1}} =$

$= \frac{n}{x} + \frac{n-1}{x^{n+1}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int \frac{nx^n + (n-1)}{x^{n+1}} dx$, calculați I_1

$E_1)$ $I_1 = \int \frac{1x^1 + (1-1)}{x^{1+1}} dx = \int \frac{x}{x^2} dx =$

$= \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int \frac{nx^n + (n-1)}{x^{n+1}} dx,$

calculați I_2

$E_1)$ $I_2 = \int \frac{2x^2 + (2-1)}{x^{2+1}} dx = \int \frac{2x^2+1}{x^3} dx$

$E_2)$ $I_2 = \int \left(\frac{2x^2}{x^{3-1}} + \frac{1}{x^3} \right) dx = 2\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^3} dx$

$E_3)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$E_4)$ $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C =$

$= \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$

$E_5)$ $I = \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$

Prof. Ovidiu Bădescu