Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ și $r=2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care ecuația $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluții reale egale.

5p **3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox și respectiv Oy.

5p **4.** Calculați $2C_4^2-3A_4^1$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numărul $a>0$ pentru care vectorii $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ sunt coliniari.

5p **6.** Aria triunghiului MNP este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculați $\sin N$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n(n-1,n+2)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Determinați ecuația dreptei A_1A_2.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m,n,p\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Pentru fiecare $p\in\mathbb{N}^*$ notăm $M_p=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,A_nA_p\leq 2\right\}$. Determinați elementele mulțimii M_{2011}.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+(m-3)X^2-17X+(2m+7)$, cu $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-3$.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x+9^x-17\cdot 3^x+15=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2+1}, & x\leq 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{16-x^2}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-1,-2)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=3m^2x^2+6mx+9$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați mulțimea primitivelor funcției f_0.

5p **b)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Calculați $\int_1^2\dfrac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x\,dx$.

Progresie aritmetică, $a_1 = 5$, $r = 2$

Calculați suma primilor 5 termeni

$E_1)$ $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2}$

$E_5)$ $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_5 = 5 + (5-1) \cdot r$

$\Rightarrow a_5 = 5 + 4 \cdot 2 \Rightarrow a_5 = 13$

$E_3)$ $S_5 = \frac{(5+13) \cdot 5}{2} = \frac{18 \cdot 5}{2} = 45$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
1/2

Se cere: $m=?$ dacă ecuația

$x^2-(m+1)x+m=0$ are soluții reale egale

E_1) ec are soluții reale egale $\Leftrightarrow \Delta=0$

E_2) $\Delta=[-(m+1)]^2-4\cdot 1\cdot m=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2+2m+1-4m=0$

$m^2-2m+1=0$

E_3) $m_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm 0}{2}=1$

$S_p: m=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 2^{x+1} - 1$, găsiți coordonatele pct de intersecție ale G_f cu axele

I/3

$E_1)$ $G_f \cap Oy$: $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$

$\Rightarrow A(0;1) \in G_f$

$E_2)$ $G_f \cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2^{x+1} = 1$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\Rightarrow B(-1;0) \in G_f$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați:

$$2C_4^2 - 3A_4^1$$

E1) Folosim $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

E2) $2C_4^2 - 3A_4^1 = 2 \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} - 3 \cdot \frac{4!}{(4-1)!} =$

$= 2 \cdot \frac{12}{2!} - 3 \cdot \frac{4! \cdot 4}{3!} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4$

$= 12 - 12 = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\vec{v_1} = 2\vec{i} + a\vec{j}$, $\vec{v_2} = (a+3)\vec{i} + 2\vec{j}$ VIII/I 15

$a = ?$, $a > 0$ dacă $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ coliniari

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) în cazul nostru: $\frac{2}{a+3} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = a^2 + 3a \Rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$

$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} 1 \\ -4 \end{matrix}$

E_3) Dar, $a > 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

Prof. Ovidiu Băescu

VIII
16

Aria ΔMNP este 16 iar $MN = NP = 8$

Se cere $\sin N$



E1) $A_{\Delta MNP} = \dfrac{l_1 \cdot l_2 \sin(\sphericalangle l_1 l_2)}{2}$

E2) $A = \dfrac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2}$

E3) Dar, $A = 16$

$\Rightarrow \dfrac{8 \cdot 8 \cdot \sin(\sphericalangle N)}{2} = 16$

$\Rightarrow \sin(\sphericalangle) = \dfrac{32}{64} = \dfrac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A_n(n-1, n+2)$, să scrie ec. dreptei A_1A_2

VIII
II 4)

$E_1)$ $A_1(0;3)$, $A_2(1;4)$

$E_2)$ ec. A_1A_2 : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_3)$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + y + 0 - 3 - 4x - 0 = 0$

$-x + y - 3 = 0 \mid \cdot(-1)$

$\boxed{d: x - y + 3 = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A_n(n-1, n+2)$, arătați că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, $\forall m, n, p \in \mathbb{N}^*$

E1) M_1, M_2, M_3 coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

E4) $A_m(m-1, m+2)$, $A_n(n-1, n+2)$, $A_p(p-1, p+2)$

coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (?)

E5) $\Delta = \begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2}{=\!=} \begin{vmatrix} -3 & m+2 & 1 \\ -3 & n+2 & 1 \\ -3 & p+2 & 1 \end{vmatrix}$

$\overset{\text{factor pe } C_1}{=\!=} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1 \\ 1 & n+2 & 1 \\ 1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1 = C_3}{=\!=} 0$

$\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare

Prof. Ovidiu Bădescu

V 111

Fie $A_n(n-1, n+2)$ și $M_p = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid A_n A_p \leq 2 \}$ II 1 c)

Determinați elementele mț M_{2011}

E₁) $M_{2011} = \{ n \in \mathbb{N}^* \mid A_n A_{2011} \leq 2 \}$ și $A_{2011}(2010, 2013)$

$$A_n A_{2011} = \sqrt{(2010-(n-1))^2 + (2013-(n+2)^2)} =$$

$$= \sqrt{(2010-n+1)^2 + (2013-n-2)^2} = \sqrt{(2011-n)^2 + (2011-n)^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot (2011-n)^2} = \sqrt{2} \cdot |2011-n|$$

E₂) $\sqrt{2} \cdot |2011-n| \leq 2 \Leftrightarrow |2011-n| \leq \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow |2011-n| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$-\sqrt{2} \leq 2011-n \leq \sqrt{2} \mid -2011$$

$$-2011-\sqrt{2} \leq -n \leq \sqrt{2}-2011 \mid \cdot(-1)$$

$$2011-\sqrt{2} \leq n \leq 2011+\sqrt{2}, \quad \sqrt{2} = 1,4\ldots$$

$$2009,\ldots \leq n \leq 2012,\ldots$$

$$\Rightarrow n \in \{ 2010; 2011; 2012 \}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = x^3 + (m-3)x^2 - 17x + (2m+7)$ VIII I 2 a)

Se cere câtul și restul $f : (x-3)$, $dm = 4$

E_1) $m = 4 \Rightarrow f = x^3 + x^2 - 17x + 15$

E_2) Horner

	X^3	X^2	X	X^0
	1	1	−17	15
3	1	4	−5	[0]

restul

E_3) $C(x) = 1 \cdot X^2 + 4 \cdot x - 5$

$R(x) = 0$

---

met I: împărțire

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X^2 - 17X + 15 & X - 3 \\ \hline -X^3 + 3X^2 & X^2 + 4X - 5 \\ \hline 4X^2 - 17X + 15 & \\ -4X^2 + 12X & \\ \hline -5X + 15 & \\ 5X - 15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow C(x) = X^2 + 4X - 5$

$R(x) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$ VIII 2 b)

$m = ?$ a.î. $f \vdots (x-1)$

$E_1)$ $f \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a) = 0$

$E_2)$ în cazul nostru, $f \vdots (x-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$

$E_3)$ $f(1) = 1 + (m-3) - 17 + 2m + 7$

$= 3m - 12$

$f(1) = 0 \Rightarrow 3m - 12 = 0 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow \boxed{m = 4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$

VM II 2 c)

$E_1)$ $3^x = t \Rightarrow 9^x = t^2$; $27^x = t^3$

$E_2)$ $t^3 + t^2 - 17t + 15 = 0$, $D_{15} = \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$

$E_3)$

	t^3	t^2	t^1	t^0
	1	1	−17	15
−1	1	0	−17	$32 \neq 0$
1	1	2	−15	0 ok.

$E_4)$ $(t-1)(1 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 15) = 0$

$\Rightarrow$ $t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$ sau $t^2 + 2t - 15 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{matrix} 3 \\ -5 \end{matrix}$

$E_5)$ $t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$t_2 = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$t_3 = -5 \Rightarrow 3^x = -5$ Fals pt că $\begin{matrix} b > 0 \\ b \neq 1 \end{matrix}$, $b > 0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$

Arătați că f continuă în $x_0=0$

$E_1)$ f continuă în $x=\alpha \Leftrightarrow l_s(\alpha)=l_d(\alpha)=f(\alpha)$

$E_2)$ f continuă în $x=0 \Leftrightarrow$

$$l_s(0)=l_d(0)=f(0)$$

$E_3)$ $l_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-4}{x^2+1}=-4$

$l_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-4)=-4$

$f(0)=\frac{-4}{0^2+1}=-4$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continuă în $x=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
II 16)

Fie $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$

Se cere: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{16-x^2}$

$E_1)$ apare $x\to 4 \Rightarrow f(x)=x-4$

$E_2)$ $l=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{16-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{4^2-x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(4-x)(4+x)}\cdot(-1)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-1}{4+x}=-\dfrac{1}{8}$

---

met II

$E_1)$ $l=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{16-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=\!=}}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)'}{(16-x^2)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{-2x}=-\dfrac{1}{8}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x^2+1}, & x \le 0 \\ x-4, & x > 0 \end{cases}$

Se cere ec. tg la Gf în $A(-1,-2)$

E_1) ec. tg în $x=\alpha$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

E_2) în cazul nostru, $A(-1,-2) \Rightarrow \alpha = -1$

$\Rightarrow \alpha = -1 \le 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{x^2+1}$

E_3) ec. tg.: $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$$f(-1) = -\frac{4}{(-1)^2+1} = -\frac{4}{2} = -2$$

E_4) $f'(x) = \left(-\frac{4}{x^2+1}\right)' = -4 \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' =$

$$= -4 \cdot \frac{1'(1+x^2) - 1 \cdot (1+x^2)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= -4 \cdot \frac{0 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{-8}{4} = -2$$

E_5) ec. tg.: $y+2 = -2(x+1)$

$y+2 = -2x-2 \Rightarrow \boxed{2x+y+4=0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
Fie $f_m(x) = 3m^2x^2 + 6mx + 9$, se
cere mț primitivelor lui f_0

$E_1)$ $f_0(x) = 3 \cdot 0^2 \cdot x^2 + 6 \cdot 0 \cdot x + 9$

$\Rightarrow f_0(x) = 9$

$E_2)$ mț primitivelor $\int f_0(x)dx = \int 9\,dx =$

$= 9\int 1\,dx = 9x + C$

Prof. Ovidiu Badescu

VIII 1

$f_m(x) = 3m^2x^2 + 6mx + 9$ 2.3)

Se cere aria dintre G_{f_1}, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$

E1) $f_1(x) = 3 \cdot x^2 + 6x + 9$

E2) $A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_0^1 |3x^2+6x+9|\,dx$

E3) $x \in [0;1] \Rightarrow 3x^2+6x+9 > 0$

$\Rightarrow A = \int_0^1 (3x^2+6x+9)\,dx =$

$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 6 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 9 \cdot x\Big|_0^1 =$

$= (1-0) + 3(1-0) + 9(1-0) =$

$= 1 + 3 + 9 = 13$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f_m(x) = 3m^2x^2 + 6mx + 9$

Se cere $\int_1^2 \frac{f_2(x)-9}{x} \cdot e^x dx$

$E_1)$ $f_2(x) = 3 \cdot 4x^2 + 6 \cdot 2x + 9$

$f_2(x) = 12x^2 + 12x + 9$

$E_2)$ $I = \int_1^2 \frac{12x^2 + 12x + 9 - 9}{x} e^x dx$

$= \int_1^2 \frac{12x(x+1)}{x} e^x dx$

$= 12 \int_1^2 (x+1) e^x dx$

$E_3)$ $f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$E_4)$ $I = 12\left((x+1)e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx \right) =$

$= 12\left(3e^2 - 2e - e^x \Big|_1^2 \right) = 12(3e^2 - 2e - e^2 + e)$

$= 12(2e^2 - e)$

Prof. Ovidiu Bădescu