**Examenul de bacalaureat 2012**
**Proba E.c)** TOAMNA, 2012
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**Varianta 9**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)+\log_2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)=2$.

**5p** **2.** Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ cu axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=4$.

**5p** **4.** Determinați rangul termenului care conține $x^{14}$ în dezvoltarea binomului $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x>0$.

**5p** **5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu dreapta $d$ de ecuație $3x+2y-1=0$.

**5p** **6.** Determinați măsura unghiului $C$ al triunghiului $ABC$, știind că $BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și măsura unghiului $BAC$ este egală cu $45°$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}-x+ay+(2a+4)z=1\\(a+2)x+ay+(a+1)z=1\\(a+1)x+(2a-1)y+3z=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

**5p** **a)** Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3+9a^2-3a-9$.

**5p** **b)** Determinați valorile reale ale lui $a$ pentru care sistemul este compatibil determinat.

**5p** **c)** Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^8+\hat{4}X^4+\hat{3}$, $f\in\mathbb{Z}_5[X]$.

**5p** **a)** Arătați că $a^5=a$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_5$.

**5p** **b)** Arătați că polinomul $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$.

**5p** **c)** Arătați că polinomul $f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

**5p** **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real $m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $p$, se consideră numărul $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}\,dx$.

**5p** **a)** Calculați $I_1$.

**5p** **b)** Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, pentru orice $p\geq 3$.

**5p** **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$.

Arătați că $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})=2$

---

$E_1$) folosim $\log_2 a+\log_2 b=\log_2(a\cdot b)$

$E_2$) $\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})+\log_2(\sqrt{7}-\sqrt{3})=$

$=\log_2(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})=$

$=\log_2\left((\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2\right)=\log_2(7-3)=$

$=\log_2 4=2$

Prof. Ovidiu Badescu

Calculați distanța dintre punctele de intersecție ale $G_f$ cu $Ox$, unde

$f(x) = x^2 + 5x + 4$

---

$E_1)$ $G_f \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix}$

$E_2)$ obținem punctele de intersecție:

$A(-1;0)$ și $B(-4;0)$

$E_3)$ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(-4+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9} = 3$

Prof. Ovidiu Badea

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$3^x + 3^{x+1} = 4$$

---

E1) $3^x + 3 \cdot 3^x = 4$

E2) notăm $3^x = t \Rightarrow t + 3t = 4$

$4t = 4 \Rightarrow t = 1$

E3) $t = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$f(x) = 3^x$ injectivă

Prof. Ovidiu Bădescu

Se cere rangul termenului ce conține pe $x^{14}$ în dezvoltarea

$$\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$$

---

E1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \Rightarrow$

E2) $T_{k+1} = C_{20}^k x^{20-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k =$

$= C_{20}^k x^{20-k} x^{-\frac{k}{2}} = C_{20}^k x^{20-k-\frac{k}{2}}$

E3) $T_{k+1}$ conține pe $x^{14} \Rightarrow 20-k-\frac{k}{2}=14 \mid \cdot 2$

$40-2k-k=28 \Rightarrow 12=3k \Rightarrow k=4$

E4) rangul este $k+1$ adică este 5

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți ecuația dreptei ce trece prin $A(3;3)$ și este paralelă cu $d: 3x+2y-1=0$




E1) $d' \parallel d \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{d'} = m_d$

E2) $m_d = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_{d'} = -\frac{3}{2}$

E3) știm $A(3;3)$, știm $m_{d'} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ ec. $d'$

este: $y - y_A = m_{d'}(x - x_A)$

$\Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}(x-3) \quad | \cdot 2$

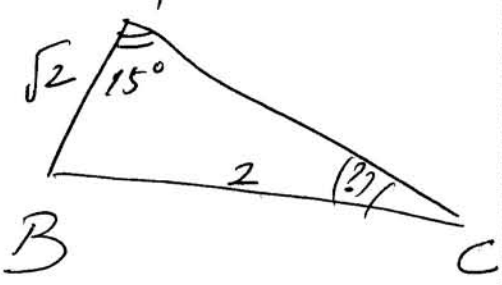
$2y - 6 = -3(x-3) \Rightarrow$

$2y - 6 = -3x + 9$

$3x + 2y - 15 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți măsura ∢C a ΔABC dacă
$BC=2$, $AB=\sqrt{2}$ și $m(B\hat{A}C)=15^\circ$




E1) T. sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

E2) $$\frac{2}{\sin 15^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$$

E3) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

E4) $$\frac{2}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$$

$$C\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}=\frac{\sqrt{12}-2}{8}$$

E5) $$\sin C=\frac{2\sqrt{3}-2}{8}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{8\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$\sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Prof. Ovidiu Badescu

T 112
II 1a)

Fie $\begin{cases} -x + ay + (2a+4)z = 1 \\ (a+2)x + ay + (a+1)z = 1 \\ (a+1)x + (2a-1)y + 3z = 2 \end{cases}$

Arătați că $\det S = 3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$

---

$E_1)\ \det S = \begin{vmatrix} -1 & a & 2a+4 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & 2a-1 & 3 \end{vmatrix} =$

$= -3a + a(a+1)^2 + (a+2)(2a-1)(2a+4) -$

$-[a(a+1)(2a+4) + 3a(a+2) - (a+1)(2a-1)]$

$E_2)\ \det S = -3a + a(a^2+2a+1) + (2a^2 - a + 4a - 2)(2a+4) -$

$-[(a^2+a)(2a+4) + 3a^2 + 6a - (2a^2 - a + 2a - 1)]$

$E_3)\ \det S = -3a + a^3 + 2a^2 + a + (2a^2 + 3a - 2)(2a+4) -$

$-(2a^3 + 4a^2 + 2a^2 + 4a + 3a^2 + 6a - 2a^2 - a + 1)$

$\det S = a^3 + 2a^2 - 2a + 4a^3 + 8a^2 + 6a^2 + 12a - 4a - 8 -$

$-(2a^3 + 7a^2 + 9a + 1)$

$\det S = 5a^3 + 16a^2 + 6a - 8 - 2a^3 - 7a^2 - 9a - 1$

$= 3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\begin{cases} -x + ay + (2a+4)z = 1 \\ (a+2)x + ay + (a+1)z = 1 \\ (a+1)x + (2a-1)y + 3z = 2 \end{cases}$

Găsiți $a=?$ pentru care sistemul este compatibil determinat, știind că $\det A = 3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$

---

E1) $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2a+4 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & 2a-1 & 3 \end{pmatrix}$

E2) S compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

E3) $\det A = 0 \Rightarrow 3a^3 + 9a^2 - 3a - 9 = 0 \mid :3$

$a^3 + 3a^2 - a - 3 = 0$

| | $a^3$ | $a^2$ | $a$ | $a^0$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | −1 | −3 |
| 1 | 1 | 4 | 3 | 0 |

E4) $\Rightarrow (a-1)(a^2+4a+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ \text{sau} \\ a^2+4a+3=0 \end{cases}$

$\Rightarrow a_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$

E5) $\not\exists$ ca $\det A = 0 \Rightarrow a \in \{1; -1; -3\}$

$\not\exists$ ca $\det A \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 1\}$

E6) Sist. compatibil determinat

$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -1; 1\}$

Prof. Ovidiu Badescu

VM3
I.0

Fie $\begin{cases} -x+ay+(2a+4)z=1 \\ (a+2)x+ay+(a+1)z=1 \\ (a+1)x+(2a-1)y+3z=2 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$

Pentru $a=-2$, rezolvați sistemul

---

$E_1)$ $a=-2 \Rightarrow$ sistemul $\begin{cases} -x-2y=1 \\ -2y-z=1 \\ -x-5y+3z=2 \end{cases}$

$E_2)$ $\det A=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix}=6-2-0-0+5-0=9\neq 0$

$\Rightarrow$ folosim Cramer

$E_3)$ $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}=-6-4-0-0+5+6=1$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-3+1-0-0-2-0=-4$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \end{vmatrix}=4+2+0-2-5-0=-1$

$E_4)$ $x=\frac{\Delta_x}{\det A}=\frac{1}{9}$; $y=\frac{\Delta_y}{\det A}=\frac{-4}{9}$; $z=\frac{\Delta_z}{\det A}=\frac{-1}{9}$

<u>Obs</u>.: deoarece nu se precizează prin ce metodă îl rezolvăm, puteam folosi substituția

$-x-2y=1 \Rightarrow -x=1+2y \Rightarrow x=-1-2y$

$\begin{cases} -2y-z=1 \\ 1+2y-5y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \end{cases} \Big| \cdot 3$

$-9y=4 \Rightarrow y=-\frac{4}{9}$

$\curvearrowleft$ Înlocuim $\Rightarrow x=\frac{1}{9}$, $z=-\frac{1}{9}$

Prof. Ovidiu Badescu

VII 3
II 2 a)

Fie $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3}$, $f \in \mathbb{Z}_5[X]$

Arătați că $a^5 = a, \forall a \in \mathbb{Z}_5$

---

$\in$) $a = \hat{0} \Rightarrow \hat{0}^5 = \hat{0}$ adev

$a = \hat{1} \Rightarrow \hat{1}^5 = \hat{1}$ adev

$a = \hat{2} \Rightarrow \hat{2}^5 = \hat{2} \Leftrightarrow 3\hat{2} = \hat{2} \overset{\mathbb{Z}_5}{\Leftrightarrow} \hat{2} = \hat{2}$ adev.

$a = \hat{3} \Rightarrow \hat{3}^5 = \hat{3} \Leftrightarrow \hat{9} \cdot \hat{9} \cdot \hat{3} = \hat{3} \overset{\mathbb{Z}_5}{\Leftrightarrow} \hat{1} \cdot \hat{3} = \hat{3}$ adev

$a = \hat{4} \Rightarrow \hat{4}^5 = \hat{4} \Leftrightarrow \hat{4}^3 \cdot \hat{4}^2 = \hat{4} \overset{\mathbb{Z}_5}{\Leftrightarrow} 6\hat{4} \cdot \hat{16} = \hat{4}$

$\Leftrightarrow \hat{4} \cdot \hat{1} = \hat{4}$ adev.

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 3
II 2 6)

Fie $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3}$, $f \in \mathbb{Z}_5$. Se știe că $a^5 = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}_5$, arătați că $f$ este reductibil peste $\mathbb{Z}_5$

---

$E_1$) Dacă $f = g \cdot h$ cu $\operatorname{gr} g > 1$ și $\operatorname{gr} h > 1$

$\Rightarrow f$ reductibil

$E_2$) $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3} \Rightarrow$

$$f = X^8 + X^4 + \hat{3}X^4 + \hat{3}$$

$$f = X^4(X^4 + \hat{1}) + \hat{3}(X^4 + \hat{1})$$

$$f = (X^4 + \hat{1})(X^4 + \hat{3})$$

$\Rightarrow f$ reductibil peste $\mathbb{Z}_5$

Prof. Ovidiu Bădescu

T112

Fie $f = X^8 + \hat{4}X^4 + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Știind II 2 c) că $a^5 = a, \forall a \in \mathbb{Z}_5$, arătați că $f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_5$

---

$E_1$) Studiem dacă $x = \hat{0}$ e rădăcină

$f(\hat{0}) = \hat{0}^8 + \hat{4}\cdot\hat{0}^4 + \hat{3} = \hat{3} \neq \hat{0} \Rightarrow \hat{0}$ nu e rad

$E_2$) Studiem dacă $x = \hat{1}$ e rădăcină

$f(\hat{1}) = \hat{1}^8 + \hat{4}\cdot\hat{1} + \hat{3} = \hat{8} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{3} \neq \hat{0} \Rightarrow \hat{1}$ nu e rad

$E_3$) Studiem dacă $x = \hat{2}$ e rădăcină

$f(\hat{2}) = \hat{2}^8 + \hat{4}\cdot\hat{2}^4 + \hat{3}$. Dar, $a^5 = a \Rightarrow \hat{2}^8 = \hat{2}^5\cdot\hat{2}^3 = \hat{2}\cdot\hat{2}^3 = \hat{2}^4$

$\Rightarrow f(\hat{2}) = \hat{2}^4 + \hat{8} + \hat{3} = \hat{16} + \hat{11} = \hat{27} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{2} \neq \hat{0} \Rightarrow \hat{2}$ nu e rădăcină

$E_4$) $f(\hat{3}) = \hat{3}^8 + \hat{4}\cdot\hat{3} + \hat{3} = \hat{3}^5\cdot\hat{3}^3 + \hat{4}\cdot\hat{3} + \hat{3} = \hat{3}^4 + \hat{15} = \hat{81} = \hat{1} \neq$

$\Rightarrow \hat{3}$ nu e rad

$E_5$) $f(\hat{4}) = \hat{4}^8 + \hat{4}\cdot\hat{4} + \hat{3} = \hat{4}^5\cdot\hat{4}^3 + \hat{16} + \hat{3} = \hat{4}^4 + \hat{19} = \hat{16}^2 + \hat{4} = \hat{1}^2 + \hat{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x}$

---

E1) $l = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

E2) $l \overset{\frac{0}{0}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+\sqrt{x^2+1}-1)'}{x'} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

$= 1$

Prof. Ovidiu Badescu

7112
II 19)

Fie $f:(\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

Se cere: ec. asimptotei spre $\infty$ pentru $G_f$

---

$E_1$) <u>as. orizontală</u>:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\overset{\infty+\infty}{=\!=}\infty\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre $\infty$

$E_2$) <u>as. oblică</u>:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=\!=}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=2\in\mathbb{R}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=\!=}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=}0$$

$E_3$) as. oblică spre $\infty$ este

$y=mx+n$ adică $y=2x$

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

Arătați că $\forall m>0$, ecuația $f(x)=m$ are o soluție unică în $\mathbb{R}$

---

E1) Vom discuta numărul de rădăcini schițând graficul, deci vom face tabelul de variație pentru $f$

E2) $f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

E3) $f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x=0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=-x$

Cond: $x^2+1\geq 0$ adev $\forall x\in\mathbb{R}$

$-x\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]\Rightarrow I_c=(-\infty,0]$

$\sqrt{x^2+1}=-x\overset{()^2}{\Rightarrow} x^2+1=x^2\Rightarrow 1=0$ fals $\Rightarrow$

ec. $f'(x)=0$ nu are răd $\Rightarrow f'$ are semn constant

pe $\mathbb{R}$ fie $f'(0)=\frac{1}{1}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

E4)

| $x$ | $-\infty$ | | | | | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | − | + | + | + | − | + |
| $f$ | | ↗ | | | | | |

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})\overset{-\infty+\infty}{=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}\overset{\frac{1}{-\infty-\infty}}{=\!=}0$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$

E5) Schițat $G_f$ $\Rightarrow$ $\forall$ dreaptă $\parallel$ prin $m$ la $Ox$ ea intersectează $G_f$ în exact 1 pct

V 11 3
II 2 a)

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$

Calculați $I_1$

---

E1) $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx$

E2) Observăm că putem face o notație astfel încât derivata a ceea ce notez să apară în interiorul integralei

E3) $t = x^2 \mid (\,)' \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0^2 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = 1^2 \Rightarrow t = 1$

E4) $I_1 = \int_0^1 e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt =$

$= \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $2I_p+(p-1)I_{p-2}=e$, dacă $\frac{VIII}{III}$ 3 2 6)

$$I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$$

---

E1) $I_p=\int_0^1 x^p e^{x^2}dx$

$f(x)=x^{p-1} \Rightarrow f'(x)=(p-1)x^{p-2}$

$g'(x)=xe^{x^2} \Rightarrow g(x)=\frac{e^{x^2}}{2}$

E2) $I_p=x^{p-1}\cdot\frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{2}(p-1)\int_0^1 x^{p-2}e^{x^2}dx$

$I_p=1\cdot\frac{e}{2}-0-\frac{1}{2}(p-1)I_{p-2}\ /\cdot 2$

$\Rightarrow 2I_p=e-(p-1)I_{p-2}$

$\Rightarrow 2I_p+(p-1)I_{p-2}=0$

Prof. Ovidiu Badescu

VM3
I 2e)

Fie $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}dx$,

calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1^2}{n^2}}+2e^{\frac{2^2}{n^2}}+\dots+ne^{\frac{n^2}{n^2}}\right)$

---

$E_1$) șirul a cărei limită se cere seamănă cu o sumă Riemann de forma $x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$E_2$) $x_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{2}{n}e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\dots+\frac{n}{n}e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

$E_3$) Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{x^2}$ cont. $x\in[0;1]$ $\Rightarrow f$ integrabilă pe $[0;1]$

Fie $\Delta=\left(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n}{n}\right)$ o diviziune a intervalului $[0;1]$ cu $\|\Delta\|=\frac{1}{n}$ și $\xi_k=\frac{k}{n}$ sistem de puncte intermediare

$E_4$) $\Rightarrow \lim\limits_{n} x_n=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx$

$E_5$) notăm $t=x^2$ (')$\Rightarrow dt=2x\,dx\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$

$x=0\Rightarrow t=0^2\Rightarrow t=0$

$x=1\Rightarrow t=1^2\Rightarrow t=1$

$$I=\int_0^1 e^t\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{2}e^t\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)$$

Prof. Ovidiu Bădescu