Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c) SESIUNEA SPECIALA, 2012

Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real m știind că mulțimile $A=\{2\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+mx+4=0\right\}$ sunt egale.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3^{\log_3 x}<1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare unul dintre numerele naturale de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}+(2a-3)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x&0&i\sin x\\0&1&0\\i\sin x&0&\cos x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați $\det(A(\pi))$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$.

2. Pe mulțimea $G=(0,1)$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $e=\dfrac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Arătați că orice element din mulțimea G este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că $f:G\to\mathbb{R}_+^*$, $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $\left(\mathbb{R}_+^*,\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{f(x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că funcția $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numerele $I_n=\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$ și $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Calculați J_1.

5p **b)** Calculați I_1.

5p **c)** Demonstrați că $J_{2n}-J_{2n+2}=I_{2n}$ pentru orice număr natural nenul n.

Prof. Ovidiu Badescu

BAC 2012 / V7 / I 1

$m = ?$ dacă $A = B$ unde $A = \{2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 4 = 0\}$

$E_1)$ $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$

$E_2)$ $A \subset B \Rightarrow x = 2$ verifică ecuația de la B

$\Rightarrow 4 + 2m + 4 = 0 \Rightarrow 2m = -8 \Rightarrow m = -4$

$E_3)$ Deci, pt $m = -4 \Rightarrow A \subset B$, verificăm dacă pentru $m = -4$, B nu are și alte rădăcini

$E_4)$ $m = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$, $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

$\Rightarrow$ pt $m = -4$ avem $B = \{2\} \Rightarrow A = B$

Prof. Ovidiu Băcescu

BAC 2012 / V7 / I 2

Se cer coordonatele vârfului funcției

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$E_2)$ $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$

$E_3)$ $y_V = -\frac{9-8}{4} = -\frac{1}{4}$

$E_4)$ $V\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2012 / V7 / I / 3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația

$$3^{\log_3 x} < 1$$

E_1) Cond.: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty) = I_C$

E_2) folosim $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\Rightarrow 3^{\log_3 x} = x^{\log_3 3} = x \Rightarrow$ inecuația devine $x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)$

E_3) Deci, $x \in (0;\infty) \cap (-\infty; 1) = (0;1)$

Prof. Ovidiu Badescu

BAC 2012/V7/I 4

Probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să fie format doar din cifre impare

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: $\overline{ab}$, $a \to 9$ v, $b \to 10$ v, independ

$\Rightarrow$ 90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: $\overline{ab}$, $a, b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$\Rightarrow$ $a \to 5$ v, $b \to 5$ v, indep

$\Rightarrow$ 25 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{25}{90} = \dfrac{5}{18}$

Prof. Dorin Bădescu

BAC 2012 / V7 / I 5

$a = ?$ pt care $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare unde

$\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$

$\vec{v} = a\vec{i} + (2a-3)\vec{j}$

$E_1)$ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

$E_2)$ $\frac{3}{a} = \frac{a}{2a-3} \Leftrightarrow 3(2a-3) = a^2$

$\Leftrightarrow 6a - 9 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$

$E_3)$ $a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

BAC 2012 /V7/ I 6

Calculați $R=?$ pentru $\triangle ABC$ dacă

$AB=AC=5$ și $BC=6$

$E_1)$ $R=\dfrac{abc}{4S}$

$E_2)$ $abc=5\cdot 5\cdot 6=150$

$E_3)$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ unde $p=\dfrac{a+b+c}{2}=8$

$\Rightarrow S=\sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)}=\sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2}$

$S=\sqrt{2^4\cdot 3^2}=2^2\cdot 3=12$

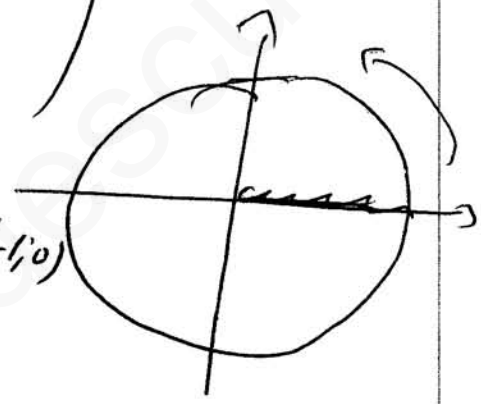
$E_4)$ $R=\dfrac{150^{16}}{4\cdot 12}=\dfrac{25}{4\cdot 2}=\dfrac{25}{8}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$

Calculați $\det(A(\pi))$

E1) $A(\pi)=\begin{pmatrix} \cos\pi & 0 & i\sin\pi \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin\pi & 0 & \cos\pi \end{pmatrix}$



E2) Dar, $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$

$\Rightarrow A(\pi)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

E3) $\det A(\pi)=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=+1+0+0-0-0-0=$

$=+1$

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1)\ A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos y & 0 & i\sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin y & 0 & \cos y \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} \cos x\cos y+0-\sin x\sin y & 0 & i\cos x\sin y+0+i\sin x\cos y \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x\cos y+0+i\cos x\sin y & 0 & -\sin x\sin y+0+\cos x\cos y \end{pmatrix}$

deoarece s-a folosit $i^2=-1$

$E_2)$ Dar, $\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$ și

$-\sin x\sin y+\cos x\cos y=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$

$i\cos x\sin y+i\sin x\cos y=i(\sin x\cos y+\cos x\sin y)=$

$=i\cdot\sin(x+y)$

$E_3)\Rightarrow A(x)A(y)=\begin{pmatrix} \cos(x+y) & 0 & i\sin(x+y) \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin(x+y) & 0 & \cos(x+y) \end{pmatrix}=$

$=A(x+y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & 0 & i\sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ și

dacă $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, rezolvați $(A(x))^{2012}=I_3$

E_1) Din $A(x)\cdot A(y)=A(x+y) \Rightarrow A(x)\cdot A(x)=A(2x)$

$\Rightarrow (A(x))^2=A(2x)$, deducem $(A(x))^n=A(nx)$

E_2) Fie $P(n):(A(x))^n=A(nx)$, $\forall n\geq 2$

E_3) I $P(2):(A(x))^2=A(2x)$ adev. din E_1)

II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{?!}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev. unde

$P(k):(A(x))^k=A(kx)$

$P(k+1):(A(x))^{k+1}=A((k+1)x)$

E_4) Știm că $P(k)$ adev. $\Rightarrow (A(x))^k=A(kx)\,\big|\cdot A(x)$

$\Rightarrow (A(x))^{k+1}=A(kx)\cdot A(x) \overset{\text{în}}{=\!=} A(kx+x)$

$\Rightarrow (A(x))^{k+1}=A((k+1)x) \Rightarrow P(k+1)$ adev. $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n\geq 2$

E_5) așadar, $(A(x))^n=A(nx) \Rightarrow (A(x))^{2012}=A(2012x)$

E_6) $A(2012x)=I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(2012x) & 0 & i\sin(2012x) \\ 0 & 1 & 0 \\ i\sin(2012x) & 0 & \cos(2012x) \end{pmatrix}=I_3$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos(2012x)=1 \\ \sin(2012x)=0 \end{cases} \Rightarrow 2012x=0+2k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{1006}$

Prof. Ovidiu Badescu

Pe $G_1=(0,1)$ definim $x \circ y = \frac{xy}{2xy-x-y+1}$

Arătați că $e=\frac{1}{2}$ este el neutru pt $\circ$

E_1) $\exists e \in G$ a.î. $\forall x \in G$ să avem

$$x \circ e = e \circ x = x$$

E_2) $x \circ e = x \Rightarrow \frac{xe}{2xe-x-e+1} = x \Leftrightarrow$

$xe = 2x^2e - x^2 - ex + x \Leftrightarrow$

$2xe - 2x^2e = -x^2 + x \Leftrightarrow (2x-2x^2)e = -x^2+x$

Ar trebui împărțit cu $2x-2x^2$, însă trebuie arătat că e nenul. Dacă $2x-2x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(1-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \notin G \\ \text{sau} \\ x=1 \notin G \end{cases} \Rightarrow 2x-2x^2 \neq 0$

$$\Rightarrow e = \frac{-x^2+x}{2x-2x^2} = \frac{x(-x+1)}{2x(1-x)} = \frac{1}{2} \in G_1 \quad (1)$$

E_3) Analog, din $e \circ x = x$ prin calcule asemănătoare se ajunge la $e=\frac{1}{2} \in G$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow e=\frac{1}{2}$ el. neutru pt $\circ$

Obs: Deoarece ni s-a dat în enunț $e=\frac{1}{2}$ puteam direct verifica dacă $x \circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \circ x = x$ și era mai simplu, însă nu e metodă generală [illegible] și reiese de $e \circ x =$

Fie $G=(0,1)$ cu $x \circ y = \frac{xy}{2xy-x-y+1}$ cu $e=\frac{1}{2}$ element neutru. Arătați că orice element din G este simetrizabil în raport cu $\circ$

$E_1) \forall x \in G, \exists x' \in G$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

$E_2) x \circ x' = e \Rightarrow \frac{xx'}{2xx'-x-x'+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xx' = 2xx' - x - x' + 1 \Leftrightarrow x' = 1-x$

Deoarece $x \in (0,1) \Rightarrow 1-x \in (0,1) \Rightarrow x' \in G$

$\Rightarrow x' = 1-x$ este simetricul lui x, $\forall x \in G$

$E_3)$ Arătăm că $\circ$ comutativă:

$\forall x, y \in G \Rightarrow x \circ y = y \circ x$

$\Leftrightarrow \frac{xy}{2xy-x-y+1} = \frac{yx}{2yx-y-x+1}$ adev.

$\Rightarrow x \circ x' = x' \circ x \Rightarrow x' = 1-x$ simetricul lui x, $\forall x \in G$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $G=(0,1)$ cu $x \circ y = \frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

Arătați că $f: G \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este un izomorfism de la $(G, \circ)$ la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

E_1) f izomorfism $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ morfism} \\ \text{și} \\ f \text{ bijectivă} \end{cases}$ $\begin{cases} f \text{ inj} \\ \text{și} \\ f \text{ surj} \end{cases}$

E_2) f morfism $\Leftrightarrow \forall x, y \in G \to f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$

E_3) $f(x \circ y) = f\left(\frac{xy}{2xy-x-y+1}\right) = \frac{2xy-x-y+1}{xy} - 1$

$$\Rightarrow f(x \circ y) = \frac{xy-x-y+1}{xy} \quad (1)$$

E_4) $f(x) \cdot f(y) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-y}{y} = \frac{1-x-y+xy}{xy}$

$$\Rightarrow f(x) \cdot f(y) = \frac{1-x-y+xy}{xy} \quad (2)$$

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow f$ morfism

E_6) Arăt. că f inj: $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f \searrow \Rightarrow f$ inj (1)

E_7) Arăt că f surj: $f: (0,1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} -$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \overset{\frac{1}{0^+} - 1}{=\!=\!=} \infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - 1 = 0$ (f cont) $\Bigg\} \Rightarrow f$ surj. (2)

E_8) Din (1) + (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} f \text{ biject} \\ 1 \text{ morf} \end{cases} \Rightarrow f$ izomorf

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{f(x)}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x+e^{-x}}$

E2) $l\ \dfrac{\infty}{\frac{\infty}{\infty}\to l'H}\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x+e^x\cdot(-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$.

E3) $l\ \dfrac{\frac{2}{\infty-0}}{=}\ 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Arătați că f este convexă pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})'=$

$=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}\cdot(-1))=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$E_2)$ $f''(x)=\left[\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})'=$

$=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}\cdot(-1))=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

$E_3)$ Deoarece $e^x>0$, $e^{-x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

T 1/2
III 7c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Arătați că $g:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(\sqrt{x})$ este $\uparrow$ pe $(0;\infty)$

$E_1)$ $g(x)=f(\sqrt{x})=\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$, $g:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

$E_2)$ $g'(x)=\left(\frac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)'=$

$=\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'+e^{-\sqrt{x}}\cdot(-\sqrt{x})'\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

$E_3)$ Mai a arăta că g $\uparrow$ pe $(0;\infty)$, arătăm că $g'(x)>0$, $\forall x\in(0;\infty)$

$E_4)$ $g'(x)=0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}-e^{-\sqrt{x}}=0\Rightarrow e^{\sqrt{x}}=e^{-\sqrt{x}}$

$\Rightarrow\sqrt{x}=-\sqrt{x}\Rightarrow 2\sqrt{x}=0\Rightarrow x=0$

$E_5)$

x	0	
g'	0	$+\ +\ +\ +\ +$
g		$\nearrow$

Mai a găsi semnul lui $g'(x)$, calculăm $g'(1)=\frac{e-\frac{1}{e}}{4\sqrt{1}}>0$

$\Rightarrow\forall x>0$, $x\in(0;\infty)\Rightarrow g$ $\uparrow$ pe $(0;\infty)$

Prof. Ovidiu Băgeșoi

Fie $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, calculați J_1 $\frac{I}{III}$ 2p)

E1) $J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2}$

E2) $J_1 = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)$

$J_1 = -(0-1) = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,dx$

Calculați I_1

E1) $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

E2) notăm $t = 1-x^2 \,|\,()' \Rightarrow dt = -2x\,dx$

$\Rightarrow x\,dx = -\frac{dt}{2}$

E3) $x = 0 \Rightarrow t = 1-0 \Rightarrow t = 1$

$x = 1 \Rightarrow t = 1-1 \Rightarrow t = 0$

E4) $I_1 = \int_1^0 \sqrt{t}\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt$

E5) $I_1 = +\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt =$

$= +\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = +\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$

$= +\frac{1}{3}(1-0) = +\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Prof. Ovidiu Badescu