Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

VARA, 2012

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1}\leq 4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ și $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\x+2y+3z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\dfrac{f(x)}{x+1}dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Calculați $|z|=?$ dacă $z=(1+i)^2$

$E_1)\ z=(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$E_2)\ |z|=|2i|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/BAC 2012/ V5/ I/2

Se cer coordonatele pct de intersecție dintre $f(x)=x^2+2x$ și $g(x)=-x-2$

E1) rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=x^2+2x \\ y=-x-2 \end{cases}$

E2) $x^2+2x=-x-2 \Rightarrow x^2+3x+2=0$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}$

E3) $x_1=-1 \Rightarrow y_1=-x_1-2 \Rightarrow y_1=-1$

$\Rightarrow A(-1;-1)$

$x_2=-2 \Rightarrow y_2=-x_2-2 \Rightarrow y_2=0$

$\Rightarrow B(-2;0)$

Prof. Ovidiu Bălescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$2^{x+1} \leq 4$$

$E_1)$ Inecuația devine: $2^{x+1} \leq 2^2$ $\Big\}\Rightarrow$

Deoarece $b = 2 > 1$

$\Rightarrow x+1 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1]$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/BAC-2021/VS/I/4

Probabilitatea ca alegând o submulțime din mult. cu 3 elemente ale mult. $A=\{1;2;3;4;5\}$, elementele ei să fie termeni consecutivi ai progr. aritmetice

---

E1) $P = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

E2) nr. cazuri posibile: nr. de submult. cu 3 elemente din 5 posibile $\Rightarrow C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{4\cdot 5}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

Obs.: se puteau scrie toate submulțimile de 3 elemente și luam punctaj maxim

E3) nr. cazuri favorabile:

progr de rație 1: $\{1;2;3\}; \{2;3;4\}; \{3;4;5\}$

progr de rație 2: $\{1;3;5\}$

progr de rație 3: $\{1;4;7\}$ fals pt că $7 \notin A$

$\Rightarrow$ nr. cazuri favorabile: 4

E4) $P = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/ BAC 2012/ V5 / I / 5

$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$

$a = ?$ a.î. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

$E_1)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$

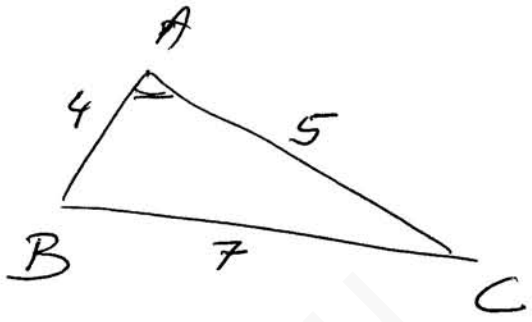
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot a + (-2) \cdot (-1) = a + 2$

$E_2)$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/ BAC 2012/ v5/ I/ 6 T11 I/6

Se cere: $\cos A = ?$ dacă $AB = 4$, $AC = 5$ și $BC = 7$



E1) T. cosinusului:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

E2) $49 = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos A$

$49 = 41 - 40\cos A \Rightarrow 40\cos A = -8$

$$\cos A = -\frac{8}{40} = -\frac{1}{5}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$

Calculați determinantul matricii sistemului

Eq1 $\det S = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 4m+3+3-6-6-m =$

$= 3m-6$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
II 15)

Fie $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$

Găsiți valorile lui m pentru care sistemul are soluție unică

E_1) S are sol unică $\Leftrightarrow$ $\det S \neq 0$

E_2) $\det S = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 4m+3+3-6-m-6 =$

$= 3m-6$

E_3) $\det S \neq 0 \Leftrightarrow 3m-6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

II 1c) Fie /227 $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$

Pt. $m=2$, găsiți soluția (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0>0$ și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$

E_1) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

E_2) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = 0$

E_3) $\operatorname{rang} A = ?$, $|2| = 2 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A \geq 2$ $\Big\} \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2$

borders $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A < 3$

E_4) $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sist compat.

E_5) sist principal $\begin{cases} 2x+y=-3\alpha \\ x+2y=-3\alpha \end{cases}$, $z=\alpha$

Reducere $\Rightarrow x=-\alpha$, $y=-\alpha$, $z=\alpha$ soluție

$\Rightarrow x_0=-\alpha$, $y_0=\alpha$, $z_0=\alpha$

E_6) $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3 \Rightarrow 3\alpha^2=3 \Rightarrow \alpha=\pm 1$ $\begin{cases} \alpha=1 \Rightarrow x=-1 \text{ fals} \\ \alpha=-1 \Rightarrow x=1, \\ y=1, z=-1 \end{cases}$

Fie $A=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}$ și $G=\{X(p)=I_2+pA \mid p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$

Arătați că $X(p)X(q)\in G,\ \forall X(p),X(q)\in G$

E_1) Dacă găsim forma lui $X(p)$ prin calculare, adică $X(p)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3p&-2p\\3p&-2p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3p+1&-2p\\3p&-2p+1\end{pmatrix}$

problema se complică

E_2) $X(p)\in G \Rightarrow X(p)=I_2+pA,\ p\neq -1$

$X(q)\in G \Rightarrow X(q)=I_2+qA,\ q\neq -1$

$X(p)X(q)=(I_2+pA)(I_2+qA)=$

$=I_2+qA+pA+pqA^2=$

$=I_2+(p+q)A+pqA^2$

E_3) ne încurcă A^2, $A^2=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$A^2=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}=A$

E_4) $X(p)X(q)=I_2+(p+q)A+pqA$

$=I_2+(p+q+pq)A=X(p+q+pq)$

E_5) arăt. că $p+q+pq\neq -1$, $\min(R,A)\Rightarrow p+q+pq=-1$ $p=-1$ fals sau

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și

$G=\{X(\alpha) = I_2 + \alpha A \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$

Se știe că $X(\alpha)X(\beta)=X(\alpha+\beta+\alpha\beta)$, se știe că $(G,\cdot)$ grup cu el neutru $X(0)$. Determinați inversul lui $X(\alpha)$

E_1) $\forall X(\alpha) \in G, \exists X(\alpha') \in G$ a.î.

$X(\alpha)X(\alpha')=X(\alpha')X(\alpha)=X(0)$

E_2) $X(\alpha)X(\alpha')=X(0) \overset{\text{def}}{\Rightarrow}$

$X(\alpha+\alpha'+\alpha\alpha')=X(0)$

$\Rightarrow \alpha+\alpha'+\alpha\alpha'=0 \Rightarrow \alpha'(1+\alpha)=-\alpha$

Din def, $\alpha \neq -1 \Rightarrow \alpha' = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$

E_3) Se arată că $X(\alpha)X(\beta')=X(\beta')X(\alpha)$ și că ambele egale cu $X(\alpha+\alpha'+\alpha\beta')=X(\beta'+\beta+\beta'\beta)$

E_4) $\Rightarrow$ simetricul lui $X(\alpha)$ este $X\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$

E_5) Rămâne să arătăm că $\alpha' \neq -1$

(R.A.) Dacă $\alpha'=-1 \Rightarrow -\frac{\alpha}{1+\alpha}=-1 \Rightarrow \alpha=-1-\alpha$

$\Rightarrow 1 \cdot \alpha = -1 \Rightarrow X(\alpha) \notin G$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
II 2)

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și

$G=\{X(\alpha)=I_2+\alpha A \mid \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$

Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$

E1) deduc $X(\alpha)X(\beta)=(I_2+\alpha A)(I_2+\beta A)=$

$=I_2+\beta A+\alpha A+\alpha\beta A^2$

E2) $A^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=A$

$\Rightarrow X(\alpha)X(\beta)=I_2+\beta A+\alpha A+\alpha\beta A$

$X(\alpha)X(\beta)=I_2+(\beta+\alpha+\alpha\beta)A$

$\Rightarrow X(\alpha)X(\beta)=X(\alpha+\beta+\alpha\beta)$ (1)

E3) $(X(\alpha))^2=X(\alpha)X(\alpha)=X(\alpha+\alpha+\alpha^2)=X(\alpha^2+2\alpha)$

$(X(\alpha))^3=(X(\alpha))^2\cdot X(\alpha)=X(\alpha^2+2\alpha)X(\alpha)\overset{(1)}{=}$

$=X((\alpha^2+2\alpha)+\alpha+(\alpha^2+2\alpha)\cdot\alpha)=$

$=X(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha)$

E4) Obs. că $I_2+7A=X(7)$ } $\Rightarrow$ ec. dată echivalentă

$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha=7$ Horner

$1\quad 3\quad 3\quad -7$

$1\quad 4\quad 7\quad 0$

$\Rightarrow \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha=7=X(1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$

Arătați că $f\nearrow$ pe $[2,\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=(x^3-12x)'=3x^2-12$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2=12\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

$E_3)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$E_4)$ $\forall x\in[2,\infty)\Rightarrow f'(x)\geq 0$ și $f'(x)=0$ doar în $x=2\Rightarrow f$ s $\nearrow$ pe $[2,\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
Nr 15)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$

Sa se afle $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}$

$E_1)\ l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3-12x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}}$

$E_2)\ l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^3-12x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{3x^2-12}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{6x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{6}\overset{\frac{\infty}{6}}{=}\infty$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$. Găsiți $a\in\mathbb{R}$ pt care $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.

E1) $f(x)=x^3-12x \Rightarrow f'(x)=(x^3-12x)'$

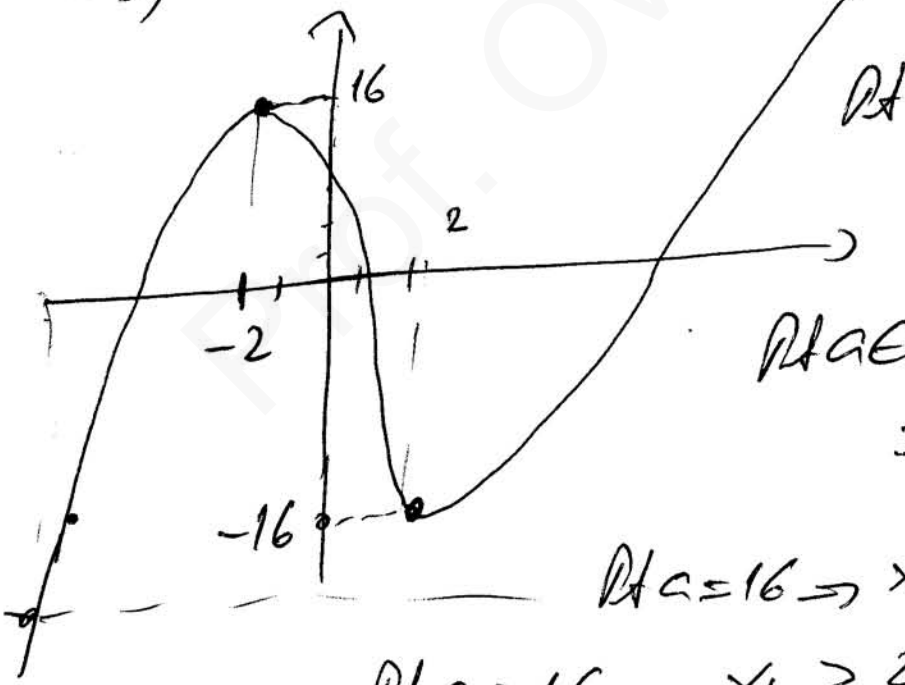
$f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

E2)

x	$-\infty$		-2		2		∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	∞

E3) Schițat, graficul este:



Pt $a<-16 \Rightarrow x_1\in(-\infty;-2)$

Pt $a=-16 \Rightarrow x_1\in(-\infty;-2)$, $x_2=2$

Pt $a\in(-16,16) \Rightarrow x_1\in(-\infty;-2)$, $x_2\in(-2,2)$, $x_3\in(2;\infty)$

Pt $a=16 \Rightarrow x_1=-2$, $x_2>2$

Pt $a>16 \Rightarrow x_1>2$

E4) $a\in(-16,16)$

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$.

Arătați că $\forall$ primitivă F a lui f este strict crescătoare pe $(-1;\infty)$

E_1) Fie F o primitivă oarecare a lui f

$\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

E_2) Știm a arăta că F strict crescătoare $\Leftrightarrow F'(x)>0$

$\Leftrightarrow f(x)>0$

E_3) Aflăm semnul lui $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$, folosind tabelul de semne

$2x+3=0\Rightarrow 2x=-3\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

$x+2=0\Rightarrow x=-2$

x	$(-1$		-2		$-\frac{3}{2}$	
$2x+3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x+3}{x+2}$				$+$	$+$	$+$

$\Rightarrow \forall x>-1\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow F$ strict crescătoare

Nu s-a găsit semnul lui $f(x)$, dacă nu [illegible]

Fie $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$, calculați 7.111 III 25)

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx$$

$E_1)\ I=\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\,dx=\int_0^1 \frac{\frac{2x+3}{x+2}}{x+1}\,dx=$

$$=\int_0^1 \frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}\,dx$$

$E_2)\ I=\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+x+2x+2}\,dx=\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\,dx$

$$=\int_0^1 \frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2}\,dx=$$

$$=\ln|x^2+3x+2|\Big|_0^1=$$

$$=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$$

Obs.: s-a folosit $\int \frac{f'}{f}=\ln|f|+C$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_x^{2x} f(t)\,dt}{x}$

E_1) studiem cazul în care ne situăm

E_2) $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{2x}\dfrac{2t+3}{t+2}\,dt$ $\overset{\text{T. medie}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to\infty} f(c_x)(2x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2c_x+3}{c_x+2}\cdot x$

E_3) Dar, $x\to\infty$ și $c_x\in(x,2x)\Rightarrow c_x\to\infty$

$\Rightarrow \dfrac{2c_x+3}{c_x+2}\to 2\Rightarrow l_1=\infty$

E_4) $l\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_x^{2x} f(t)\,dt\right)'}{x'}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(F(2x)-F(x))'}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(2x)\cdot 2-f(x)}{1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{4x+3}{2x+2}\cdot 2-\frac{2x+3}{x+2}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x+6-4x-6}{2x+2}$

$=4-2=2$