Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

5p **2.** Se notează cu x_1, x_2 soluțiile ecuației $x^2-3x+a=0$, unde a este un număr real. Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_1x_2=5$.

5p **3.** Se notează cu g inversa funcției bijective $f:(0,+\infty)\to(4,+\infty)$, $f(x)=2^x+3$. Determinați $g(5)$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(7,12)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se notează cu $D(a,b,c)$ determinatul matricei $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2a&2b&2c\\3a^2&3b^2&3c^2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(0,1,-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care matricea $A(0,1,x)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi și $D(a,b,c)=0$, atunci triunghiul este isoscel.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{4}x+\hat{3}$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{1})+f(\hat{3})$.

5p **b)** Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{4}X+\hat{3}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

5p **c)** Arătați că funcția f nu este surjectivă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\frac{3-9x}{x^2+3}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

5p **c)** Arătați că $(p+1)\int_1^x f^p(t)dt+\int_1^x f^{p+1}(t)dt=xf^{p+1}(x)$, pentru orice $x\geq 1$ și orice $p>0$.

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII.0
I/1

Calculați partea reală pentru $(1+2i)^2$

E1) $z=(1+2i)^2 \Rightarrow z=1+4i+4i^2 \Rightarrow z=1+4i-4$

$\Rightarrow z=-3+4i$

E2) Din $z=-3+4i \Rightarrow$ partea reală este -3

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
I/2

Fie x_1, x_2 soluțiile pentru $x^2 - 3x + a = 0$.

Găsiți a pentru care $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 5$

E1) Din VIETE $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{a}{1} = a \end{cases}$

E2) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 5 \Rightarrow 3 + a = 5 \Rightarrow a = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
I/3

Fie g inversa funcției bijective

$f:(0,\infty)\to(4,\infty)$, $f(x)=2^x+3$

Calculați $g(5)$

E_1) Ca teorie, ar trebui știută relația între o funcție și inversa sa, adică

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

E_2) $g(5)=f^{-1}(5)=a$ cu condiția ca $f(a)=5$

E_3) $f(a)=5 \Rightarrow 2^a+3=5 \Rightarrow 2^a=2 \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow g(5)=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 0
I/4

Fie $A=\{1;2;3;4;5\}$. Determinați probabilitatea ca alegând la întâmplare una dintre submulțimile lui A, aceasta să conțină exact trei elemente

---

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. de cazuri posibile: numărul total de submulțimi ale lui A care este 2^n adică

$$2^5=32$$

$E_3)$ nr. de cazuri favorabile: numărul de submulțimi ale lui A cu 3 elemente.

Aleg 3 din 5, nu contează ordinea (așa că în acolade, $\{a;b\}=\{b;a\}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2}=10$$

$E_4)$ $P=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
I/5

Fie $A(1;3)$, $B(7;12)$, găsiți coordonatele lui M dacă $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

E_1) exprim cu versori

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(x_M-x_A)\vec{i}+(y_M-y_A)\vec{j} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}$

E_2) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}=$

$=(7-1)\vec{i}+(12-3)\vec{j}=6\vec{i}+9\vec{j}$

E_3) Din $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}=\frac{1}{3}(6\vec{i}+9\vec{j})$

$\Rightarrow (x_M-1)\vec{i}+(y_M-3)\vec{j}=2\vec{i}+3\vec{j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M-1=2 \Rightarrow x_M=3 \\ y_M-3=3 \Rightarrow y_M=6 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(3;6)$

Prof. Ovidiu Bagescu

VIII.0
I/6

Găsiți $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ cu

$$\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 3$$

E1) Din $\frac{\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2\cos x}{\cos x} = 3$

$\Rightarrow \operatorname{tg} x + 2 = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1$

E2) $\operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x \in \{\operatorname{arctg} 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E3) Dau, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, din valori lui k

$k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} - \pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \notin (0, \frac{\pi}{2})$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ soluție

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin (0, \frac{\pi}{2})$

$S_f : x = \frac{\pi}{4}$

Obs: Eu aș fi dat punctaj maxim și dacă din $\left.\begin{matrix} \operatorname{tg} x = 1 \\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$, însă s-ar putea ca altcineva să nu dea maxim

Prof. Ovidiu Badescu

V 110
II 1a)

Fie $D(a,b,c)$ determinantul matricei

$$A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{pmatrix}$$

Calculați $D(0;1;-1)$

E1) $D(0;1;-1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=$

$=6+0+0-0-(-6)-0$

$=6+6=12$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{pmatrix}$ și

$x \in \mathbb{R}$, găsiți x pentru care $A(0;1;x)$ are rangul 2

$E_1)$ $A(0;1;x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 3 & 3x^2 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $A(0;1;x)$ are rangul 2 $\Leftrightarrow$ $\det A(0;1;x)=0$ și

$\exists$ un minor de ordin 2 nenul

$E_3)$ $\det A(0;1;x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2x \\ 0 & 3 & 3x^2 \end{vmatrix} = 6x^2+0+0-0-6x-0=$

$=6x^2-6x$

$E_4)$ $\det A(0;1;x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \mid :6 \Leftrightarrow$

$x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{sau} \\ x=1 \end{cases}$

$E_5)$ Deoarece $\forall x$ avem minorul de ordin 2 nenul

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-0=2 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rang} A(0;1;x)=2 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $D(a,b,c)$ determinantul asociat matricii $A(a,b,c)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{pmatrix}$. V 110 II 1c)

Arătați că dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi și $D(a,b,c)=0$, atunci Δ este isoscel

---

E1) $D(a,b,c)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix}$ 2 factor de pe l_2 / 3 factor de pe l_3

$=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ det. VANDERMONDE

$=6(c-b)(c-a)(b-a)$

E2) $D(a,b,c)=0 \Leftrightarrow (c-b)(c-a)(b-a)=0$

$\Leftrightarrow$ $c=b$ sau $c=a$ sau $b=a$ $\Rightarrow \Delta$ isoscel

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII.0
I.2 a)

În $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, fie $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$,

$f(x) = x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{4}x + \hat{3}$

Calculați $f(\hat{1}) + f(\hat{3})$

$E_1)$ $f(\hat{1}) = \hat{1}^3 + \hat{2}\cdot\hat{1}^2 + \hat{4}\cdot\hat{1} + \hat{3} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{3} =$

$= \hat{8} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{3}$

$E_2)$ $f(\hat{2}) = \hat{2}^3 + \hat{2}\cdot\hat{2}^2 + \hat{4}\cdot\hat{2} + \hat{3} = \hat{8} + \hat{8} + \hat{8} + \hat{3} =$

$= \hat{27} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{2}$

$E_3)$ $f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{3} + \hat{2} = \hat{5} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ V 110 II 26)

E_1) Dacă P are o rădăcină $\alpha \Rightarrow$ Horner $\Rightarrow$

$P(X) = (X - \alpha)\, C(X)$

E_2) $X = \hat{0}$, $P(\hat{0}) = \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{3} = \hat{3} \neq \hat{0} \Rightarrow \alpha = \hat{0}$ nu e rădăcină

Pentru restul, încercăm prin Horner

	X^3	X^2	X	X^0
	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{7} = \hat{2}$	$\boxed{\hat{5} = \hat{0}}$

$\Rightarrow \alpha = \hat{1}$ e rădăcină $\Rightarrow P = (X - \hat{1})(1 \cdot X^2 + \hat{3}X + \hat{2})$

$\Rightarrow P = (X + \hat{4})(X^2 + \hat{3}X + \hat{2})$

E_3)

	X^2	X	X^0
	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$
~~$\hat{1}$~~	~~$\hat{1}$~~	~~$\hat{4}$~~	~~$\hat{6} = \hat{1} \neq \hat{0}$~~
~~$\hat{2}$~~	~~$\hat{1}$~~	~~$\hat{5} = \hat{0}$~~	~~$\hat{2} \neq \hat{0}$~~
$\hat{3}$	$\hat{1}$	$\hat{6} = \hat{1}$	$\boxed{\hat{5} = \hat{0}}$

$\Rightarrow X^2 + \hat{3}X + \hat{2} = (X - \hat{3})(\hat{1} \cdot X + \hat{1})$

E_4) $P = (X + \hat{4})(X - \hat{3})(X + \hat{1})$ $\mathbb{Z}_5$

$= (X + \hat{4})(X + \hat{2})(X + \hat{1})$

Deoarece factorii de gr I $\Rightarrow$ ireductibili

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
II 2c)

Fie $f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{4}x + \hat{3}$

Arătați că f nu este surjectivă

E_1) Arătăm că $\exists y \in Cd_f$ a.î. $\nexists x \in D_f$ a.î. $f(x) = y$

E_2) $f(\hat{0}) = \hat{0}^3 + \hat{2}\cdot\hat{0}^2 + \hat{4}\cdot\hat{0} + \hat{3} = \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{3} =$

$= \hat{3}$

$f(\hat{1}) = \hat{1}^3 + \hat{2}\cdot\hat{1}^2 + \hat{4}\cdot\hat{1} + \hat{3} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{3} =$

$= \hat{10} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{0}$

$f(\hat{2}) = \hat{2}^3 + \hat{2}\cdot\hat{2}^2 + \hat{4}\cdot\hat{2} + \hat{3} = \hat{8} + \hat{8} + \hat{8} + \hat{3} =$

$= \hat{27} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{2}$

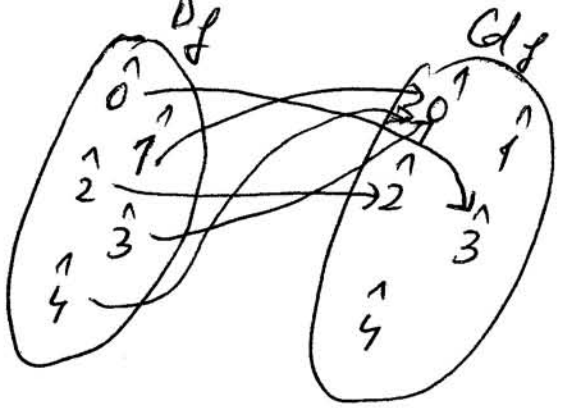
$f(\hat{3}) = \hat{3}^3 + \hat{2}\cdot\hat{3}^2 + \hat{4}\cdot\hat{3} + \hat{3} = \hat{27} + \hat{18} + \hat{12} + \hat{3} =$

$= \hat{60} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{0}$

$f(\hat{4}) = \hat{4}^3 + \hat{2}\cdot\hat{4}^2 + \hat{4}\cdot\hat{4} + \hat{3} = \hat{64} + \hat{32} + \hat{16} + \hat{3} =$

$= \hat{115} \underset{\mathbb{Z}_5}{=} \hat{0}$

E_3) Cu diagrame (pentru a vă fi mai ușor)



$\Rightarrow \exists y = \hat{1}$ a.î.

$\nexists x \in D_f$ a.î. $f(x) = \hat{1}$

$\Rightarrow f$ nu e surjectivă

Prof. Ovidiu Badescu

V 110
III 109

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$

Arătați că $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+3}=\dfrac{3-9x}{x^2+3}$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}\right)'=\dfrac{(x+9)'\sqrt{x^2+3}-(x+9)(\sqrt{x^2+3})'}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}$

$=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x+9)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x}{x^2+3}=$

$=\dfrac{\dfrac{x^2+3-(x+9)\cdot x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=\dfrac{x^2+3-x^2-9x}{\sqrt{x^2+3}\cdot(x^2+3)}=$

$=\dfrac{3-9x}{\sqrt{x^2+3}\cdot(x^2+3)}$

E2) $f'(x)\sqrt{x^2+3}=\dfrac{3-9x}{\sqrt{x^2+3}\cdot(x^2+3)}\cdot\sqrt{x^2+3}=$

$=\dfrac{3-9x}{x^2+3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII D
III 16)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$

Determinați asimptota spre ∞ a G_f

E_1) <u>as. orizontală</u>: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+\frac{9}{x})}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$

$\dfrac{1+0}{1+0}$

$= 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow y=1$ as. oriz spre ∞

E_2) <u>as. oblică</u>: deoarece $\exists$ as. oriz spre ∞

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 0
III 1 c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}$

Determinați imaginea lui f

$E_1)$ $f'(x)=\left(\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}\right)'=\dfrac{(x+9)'\sqrt{x^2+3}-(x+9)\left(\sqrt{x^2+3}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}=$

$=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x+9)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot 2x}{x^2+3}=$

$=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-(x+9)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{x^2+3-x^2-9x}{\sqrt{x^2+3}\cdot(x^2+3)}=$

$=\dfrac{3-9x}{\sqrt{x^2+3}\cdot(x^2+3)}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Leftrightarrow 3-9x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

$E_3)$

x		$1/3$	
f'	$+\ +\ +\ +\ 0$		$-\ -\ -\ -\ -$
f	$-1\ \nearrow$	$2\sqrt{7}$	$\searrow\ 1$

$f'(0)=\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot 3}>0\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(-\infty,1/3)\Rightarrow f_s\nearrow$

$f'(1)=\dfrac{-6}{\sqrt{4}\cdot 4}<0\Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(\tfrac{1}{3},\infty)\Rightarrow f_s\searrow$

$E_4)$ $f(1/3)=\dfrac{\frac{1}{3}+9}{\sqrt{\frac{1}{9}+3}}=\dfrac{\frac{28}{3}}{\sqrt{\frac{28}{9}}}=\dfrac{28}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{28}}=\dfrac{28\sqrt{28}}{28}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(1+\frac{9}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=-1;\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+9}{\sqrt{x^2+3}}\overset{\text{analog}}{=}1,$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f=[-1;2\sqrt{7}]\cup(1;2\sqrt{7}]=(-1;2\sqrt{7}]$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII.0
III.2.a)

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$

Arătați că $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x-x$ este o primitivă a lui f.

E_1) F derivabilă - evident (1)

E_2) $F'(x)=(x\ln x-x)'=x'\ln x+x\cdot(\ln x)'-x'=$

$=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$

$\Rightarrow F'(x)=f(x)$ (2)

E_3) Din (1)+(2) $\Rightarrow F$ e primitivă pt f

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
III 26)

Fie $f, F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ și $F(x)=x\ln x-x$. Dacă F este o primitivă pt f, calculați aria dintre $x=1$ și $x=e$

E1) $\mathcal{A}=\int_1^e |f(x)|\,dx=\int_1^e |\ln x|\,dx$

E2) $x\in[1,e]\Rightarrow 1\le x\le e \mid \ln(\cdot)$

$\Rightarrow \ln 1\le \ln x\le \ln e\Rightarrow$

$0\le \ln x\le 1\Rightarrow \ln x\ge 0\Rightarrow$

$\Rightarrow |\ln x|=\ln x\Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \ln x\,dx$

E3) Dar, F primitivă pt $f\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$

$\Rightarrow \int_1^e \ln x\,dx=(x\ln x-x)\Big|_1^e=$

$=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=(e-e)-(0-1)=$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII 0
III 2 c)

Fie $f(x)=\ln x$, arătați că

$$(p+1)\int_1^x f^p(t)\,dt+\int_1^x f^{p+1}(t)\,dt=x f^{p+1}(x)$$

E_1) înlocuind $f(x)=\ln x$, egalitatea de demonstrat este: $(p+1)\int_1^x (\ln t)^p\,dt+\int_1^x (\ln t)^{p+1}\,dt=x(\ln x)^{p+1}$

E_2) Fie $\int_1^x (\ln t)^{p+1}\,dt$

$f=(\ln t)^{p+1}\Rightarrow f'=(p+1)(\ln t)^p\cdot\frac{1}{t}$

$g'=1\Rightarrow g=t$

$$\Rightarrow \int_1^x (\ln t)^{p+1}\,dt=t\cdot(\ln t)^{p+1}\Big|_1^x-(p+1)\int_1^x (\ln t)^p\cdot\frac{1}{t}\,t\,dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x (\ln t)^{p+1}\,dt=x(\ln x)^{p+1}-1\cdot 0-$$

$$-(p+1)\int_1^x (\ln t)^p\,dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x (\ln t)^{p+1}\,dt+(p+1)\int_1^x (\ln t)^p\,dt=x(\ln x)^{p+1}$$

$$\Rightarrow (p+1)\int_1^x f^p(t)\,dt+\int_1^x f^{p+1}(t)\,dt=x f^{p+1}(x)$$

Prof. Ovidiu Bădescu