INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN CARAŞ-SEVERIN

MINISTERUL
EDUCAŢIEI
NAŢIONALE

# SIMULAREA EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2012

**Matematică *M_mate-info***

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. Să se ordoneze descrescător numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$.
2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+mx+1$. Găsiţi valorile reale ale parametrului m astfel încât vârful parabolei să fie în cadranul IV.
3. Rezolvaţi în numere reale ecuaţia: $16^x+3\cdot 4^x=4$
4. Calculaţi $C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6$
5. În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $M(2,-1)$, $A(1,2)$ şi $B(4,1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.
6. Rezolvaţi în intervalul $[-\pi,0)$ ecuaţia $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele A= $\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ si $B=I_3+A$.
   a) Să se verifice că $A^2=10A$..
   b) Să se arate că matricea B este inversabilă şi inversa sa este matricea $B^{-1}=I_3-\left(\frac{1}{11}\right)A$
   c) Să se găsească trei matrici $U,V,W\in M_3(C)$ de rang 1, astfel încât $B=U+V+W$.
2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$.
   a) Să se arate că legea "*" este asociativă.
   b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$. Să se verifice relaţia $f(x*y)=f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$
   c) Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\ldots*\frac{1}{2013}$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$. Notăm prin $f^{(n)}(x)$, derivata de ordinul n a funcţiei f, în punctul $x$.
   a) Arătaţi că $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$
   b) Câte puncte de maxim local are funcţia $f$ în intervalul $[-\pi,3\pi]$?
   c) Care este lungimea maximă a unui interval inclus în $[0,2\pi]$ pe care funcţia f este convexă?
2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
   a) Să se verifice că $f(x+2\pi)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.
   b) Să se arate că orice primitivă a funcţiei $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Ordonați descrescător: $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{8}$

---

$E_1$) $a = \sqrt{3}$

$b = \sqrt[3]{5}$

$c = \sqrt[4]{8}$

$E_2$) ordinul comun al radicalilor este 12, folosim

$$\sqrt[a]{x^b} = \sqrt[a \cdot n]{x^{b \cdot n}}$$

$E_3$) $a = \sqrt{3} = \sqrt[2 \cdot 6]{3^6} = \sqrt[12]{9 \cdot 9 \cdot 9} = \sqrt[12]{81 \cdot 9} = \sqrt[12]{729}$

$b = \sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^4} = \sqrt[12]{625}$

$c = \sqrt[4]{8} = \sqrt[4 \cdot 3]{8^3} = \sqrt[12]{64 \cdot 8} = \sqrt[12]{512}$

$E_4$) ordonate descrescător sunt

$$\sqrt[12]{729} > \sqrt[12]{625} > \sqrt[12]{512}$$

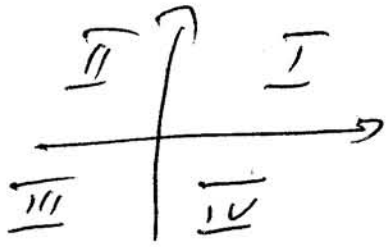
adică $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{8}$

Prof. Ciucu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+mx+1$. Găsiți valorile lui $m$ pentru care vârful este în Cd IV

---

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$




$E_2)$ $V\in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} x_V>0 \\ y_V<0 \end{cases}$

$E_3)$ $x_V>0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Leftrightarrow -\frac{m}{4}>0 \mid\cdot 4 \Leftrightarrow -m>0$

$\Leftrightarrow m<0 \Rightarrow m\in(-\infty;0)=I_1$

$E_4)$ $y_V<0 \Leftrightarrow -\frac{\Delta}{4a}<0 \Leftrightarrow -\frac{m^2-8}{8}<0 \mid\cdot 8 \Leftrightarrow$

$-(m^2-8)<0 \mid\cdot(-1) \Leftrightarrow m^2-8>0 \Rightarrow$ sinec sg II

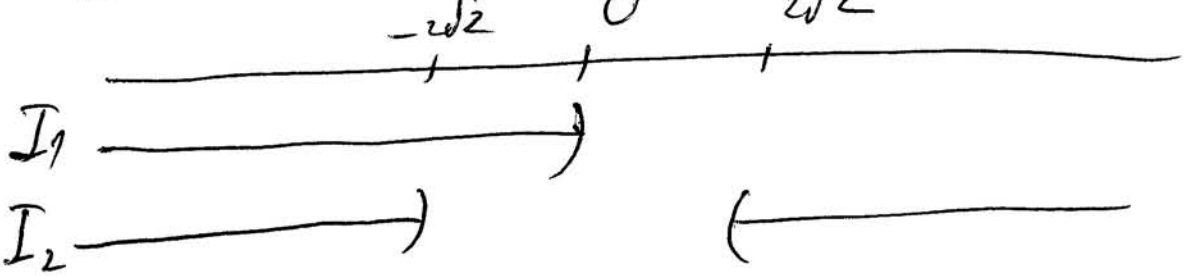
$m^2-8=0 \Rightarrow m^2=8 \Rightarrow m=\pm 2\sqrt{2}$

$E_5)$

| $m$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $2\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m^2-8$ | $++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $++$ |

$m^2-8>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2};\infty)=I_2$

$E_6)$ $I_c=I_1\cap I_2$




$\Rightarrow I_1\cap I_2=(-\infty;-2\sqrt{2})$

Prof. Ovidiu Bălăoscu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$16^x + 3 \cdot 4^x = 4$$

---

E1) notăm $4^x = t \Rightarrow 16^x = t^2$

E2) $t^2 + 3t = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

E3) $t_1 = 1 \Rightarrow 4^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$t_2 = -2 \Rightarrow 4^x = -2$ fals pt că $4^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$S_f : x \in \{0\}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați: $C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6$

---

E1) Folosim $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} = 21$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4! \cdot 3!} = 35$$

$C_7^5 = C_7^{7-5} = C_7^2$ (formula comb. complementare sau calcul) $\Rightarrow C_7^5 = 21$

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!(7-1)!} = \frac{6! \cdot 7}{6! \cdot 1} = 7$$

E2) $S = 21 + 35 + 35 + 21 + 7 = 119$

Obs.: cred că mai util era ceva de genul

$$C_{17}^2 + C_{17}^3 + \ldots + C_{17}^{16} = ?$$

---

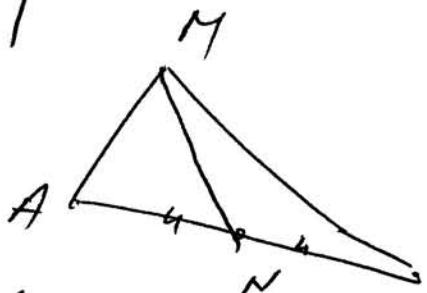
Soluție: se știe că $C_{17}^0 + C_{17}^1 + \ldots + C_{17}^{17} = 2^{17}$

$$\Rightarrow C_{17}^2 + C_{17}^3 + \ldots + C_{17}^{16} = 2^{17} - (C_{17}^0 + C_{17}^1 + C_{17}^{17})$$

$$= 2^{17} - (1 + 17 + 1) = 2^{17} - 19$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $M(2;-1)$, $A(1;2)$, $B(4;1)$. Calculați $|\vec{MA}+\vec{MB}|$




---

met I: G) În $\Delta MAB$, fie MN mediană $\Rightarrow \vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{MA}+\vec{MB})$

$\Rightarrow \vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MN} \Rightarrow |\vec{MA}+\vec{MB}|=|2\vec{MN}|=2MN$

E2) N mijl $AB \Rightarrow x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$

$y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow N\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

E3) $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+\left(\frac{3}{2}+1\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+25}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow 2MN=\sqrt{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{MA}+\vec{MB}|=\sqrt{26}$

met II: $\vec{MA}=(x_A-x_M)\vec{i}+(y_A-y_M)\vec{j}=(1-2)\vec{i}+(2+1)\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{MA}=-\vec{i}+3\vec{j}$

Analog, $\vec{MB}=(x_B-x_M)\vec{i}+(y_B-y_M)\vec{j}=2\vec{i}+2\vec{j}$

$\vec{MA}+\vec{MB}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{i}+2\vec{j}=\vec{i}+5\vec{j}$

$|\vec{MA}+\vec{MB}|=|\vec{i}+5\vec{j}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

Profesorul Bandsu

T116
T16

Rezolvați în $[-\pi; 0)$ ecuația

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

---

$E_1$) Vom folosi $\sin t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{3\pi-\pi}{6}-x\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{6}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$E_2$) Ecuația devine:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-x=2x+\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ sau } \frac{\pi}{3}-x=-\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow -3x=2k\pi \text{ sau } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{2k\pi}{3} \text{ sau } x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$

$E_3$) $x\in\left\{-\frac{2k\pi}{3}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

$E_4$) $k=-3\Rightarrow x\in\left\{+2\pi; -\frac{2\pi}{3}-6\pi\right\}\cap[-\pi; 0)=\emptyset$

$k=-2\Rightarrow x\in\left\{+\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}-4\pi\right\}\cap[-\pi; 0)=\emptyset$

$k=-1\Rightarrow x\in\left\{\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}-2\pi\right\}\cap[-\pi; 0)=\emptyset$

$k=0\Rightarrow x\in\left\{0; -\frac{2\pi}{3}\right\}\cap[-\pi; 0)=\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$

$k=1\Rightarrow x\in\left\{-\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}-2\pi\right\}\cap[-\pi; 0)=\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$

$k=2\Rightarrow x\in\left\{-\frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}-4\pi\right\}\cap[-\pi; 0)=\emptyset$

$k=3\Rightarrow x\in\left\{-2\pi; -\frac{2\pi}{3}-6\pi\right\}\cap[-2\pi, 0)=\emptyset$

$S.: x\in\left\{-\frac{2\pi}{3}\right\}$

Prof Ovidiu Badescu

VII 3
II 19)

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, arătați că $A^2=10A$

---

E) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 9+12+9 & 6+8+6 & 3+4+3 \\ 18+24+18 & 12+16+12 & 6+8+6 \\ 27+36+27 & 18+24+18 & 9+12+9 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \\ 60 & 40 & 20 \\ 90 & 60 & 30 \end{pmatrix}=10\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}=10A$

Prof. Ovidiu Bădescu

VIII
II 16)

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

Se știe că $A^2=10A$, arătați că $B$ este inversabilă și că $B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$

---

$E_1$) Vom folosi proprietatea:

„Dacă $AB=I_n$ și $BA=I_n \Rightarrow B$ inversabilă și $B^{-1}=A$"

$E_2$) În cazul nostru, vom calcula $B\cdot(I_3-\frac{1}{11}A)$ și pe $(I_3-\frac{1}{11}A)\cdot B$. Dacă în fiecare caz vom obține $I_3 \Rightarrow B$ inversabilă și $B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$

$E_3$) $B\cdot(I_3-\frac{1}{11}A)=(I_3+A)(I_3-\frac{1}{11}A)=$

$=I_3-\frac{1}{11}A+\frac{11}{A}-\frac{1}{11}A^2 \quad \underline{\underline{A^2=10A}}$

$=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{1}{11}\cdot 10A=I_3$

Analog, $(I_3-\frac{1}{11}A)B=(I_3-\frac{1}{11}A)(I_3+A)=$

$=I_3+\frac{11}{A}-\frac{1}{11}A-\frac{1}{11}A^2=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$

$E_4$) Din (1)+(2) $\Rightarrow B$ inversabilă și

$B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$

Găsiți trei matrici $U, V, W \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de rang 1 astfel încât $B=U+V+W$

---

E1) $B=I_3+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

E2) Este evident că orice matrice de tipul $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cu cel puțin unul dintre $a, b$ sau $c$ nenul are rangul 1, analog $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

E3) Fie $U=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rang $U$ = rang $V$ = rang $W$ = 1 și

$U+V+W=A$

Prof. Ovidiu Bădescu

Pe $\mathbb{R}$ definim $x * y = x + y + xy$

Arătați că $*$ asociativă

---

$E_1)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \overset{(?)}{\Rightarrow} (x*y)*z = x*(y*z)$

$E_2)$ $(x*y)*z = (x+y+xy)*z =$

$= (x+y+xy) + z + (x+y+xy)z =$

$= x+y+z+xy+xz+yz+xyz \quad (1)$

$E_3)$ $x*(y*z) = x*(y+z+yz) =$

$= x + (y+z+yz) + x\cdot(y+z+yz) =$

$= x+y+z+yz+xy+xz+xyz \quad (2)$

$E_4)$ Din $(1)+(2) \Rightarrow *$ asociativă

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = x + y + xy$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Arătați că $f(x * y) = f(x) f(y)$

---

$E_1$) $f(x * y) = f(x + y + xy) = x + y + xy + 1$ (1)

$E_2$) $f(x) \cdot f(y) = (x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$ (2)

$E_3$) Din (1) și (2) $\Rightarrow f(x * y) = f(x) f(y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = x + y + xy$, calculați

$$1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \ldots * \frac{1}{2013}$$

---

$E_1)$ $1 * \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$

$E_2)$ $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \left(1 * \frac{1}{2}\right) * \frac{1}{3} = 2 * \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$

$= 2 + 1 = 3$

$E_3)$ Observăm că $1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{n} = n$, $\forall n \geq 2$. Arătăm prin inducție matematică

$E_4)$ I: $P(2)$: $1 * \frac{1}{2} = 2$ adev. (din $E_1$)

II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev. unde

$P(k)$: $1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{k} = k$

$P(k+1)$: $1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{k+1} = k+1$

---

Știm că $P(k)$ adev. $\Rightarrow 1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{k} = k \,|_d * \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow 1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{k+1} = k * \frac{1}{k+1}$

Este suficient să arătăm că $k * \frac{1}{k+1} = k+1 \Leftrightarrow$

$$k + \frac{1}{k+1} + k \cdot \frac{1}{k+1} = k+1 \Leftrightarrow k + \frac{1}{k+1} + \frac{k}{k+1} = k+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{k+1} = 1 \text{ adev.} \Rightarrow P(k+1) \text{ adev.} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 2$

$E_5)$ Din $1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{n} = n$, $\forall n \geq 2$

$$\Rightarrow 1 * \frac{1}{2} * \ldots * \frac{1}{2013} = 2013$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, arătați că $\underline{\text{III 1 c)}}$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ \text{unde}$$

$f^{(n)}$ înseamnă derivata de ordin $n$ a lui $f$

---

$E_1$) vom rezolva prin inducție matematică, notăm

$$P(n):\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$E_2$) I $P(1)$: $f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Dar, $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$ (1)

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\cos x\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}=\cos x$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow$ $P(1)$ adev.

II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ $P(k+1)$ adev.

$P(k)$: $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$P(k+1)$: $f^{(k+1)}(x)=\sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

---

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\Big|(\ )'$

$\Rightarrow f^{(k+1)}(x)=\left[\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)'=$

$=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

E suficient să arătăm că $\sin\left(x+(k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$,

Dar, $\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$

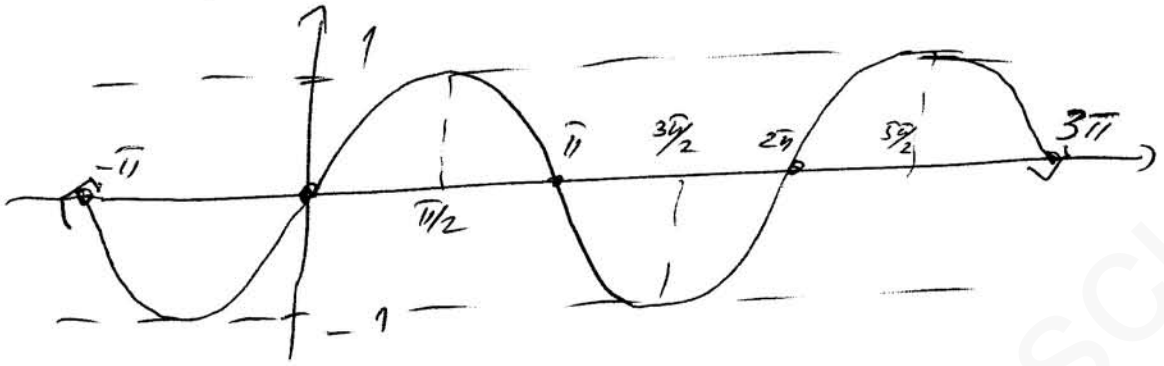
$=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(n)$ adev $\forall n\geq 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\sin x$, găsiți numărul punctelor de maxim local ale lui $f$ din $[-\pi, 3\pi]$

met I (grafică)




Observăm din grafic că $x=-\pi$; $x=\pi/2$; $x=5\pi/2$ sunt puncte de maxim local $\Rightarrow f$ are 3 puncte de maxim local

met II:

$f'(x)=\cos x$, $f'(x)=0 \Rightarrow \cos x=0$

$\Rightarrow x\in\{\arccos 0+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\arccos 0+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow x\in\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Se cer soluții din $[-\pi, 3\pi] \Rightarrow$ dăm valori lui $k$

$\Rightarrow x\in\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\}$

| $x$ | $[-\pi$ | $-\pi/2$ | $\pi/2$ | $3\pi/2$ | $5\pi/2$ | $3\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0+$ | $+$ | $0-$ | $-$ | $0+$ | $+$ | $0-$ |
| $f$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | |

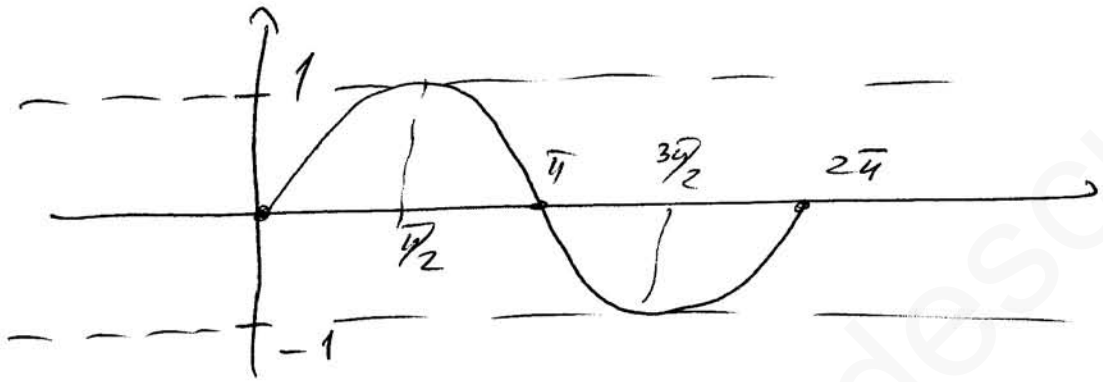
$\Rightarrow x=-\pi$, $x=\pi/2$, $x=5\pi/2$ pct de maxim local

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = \sin x$, găsiți lung. maximă a unui interval inclus în $[0; 2\pi]$ pe care $f$ este convexă

---

mod I (grafică)




$\Rightarrow f$ convexă pe $[\pi; 2\pi]$ care este și intervalul maxim pe care $f$ e convexă $\Rightarrow$ lungimea maximă este $\pi$

---

mod II: $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x \in \{\arcsin 0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin 0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$x \in \{0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Se cer soluții din $[0; 2\pi] \Rightarrow$ dăm lui $k$ valori

$\Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi\}$

| $x$ | $[0$ | | $\pi$ | | $2\pi]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ | $0$ |
| $f$ | | $\cap$ | | $\cup$ | |

$\Rightarrow f$ convexă pe $[\pi; 2\pi]$

$\Rightarrow$ lung maximă este $\pi$

Prof. Ovidiu Bădescu

VII.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$, verificați III 2a)

că $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

---

E1) $f(x+2\pi)=\frac{1}{3+\cos(x+2\pi)}=\frac{1}{3+\cos x}=f(x)$,

s-a folosit $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{3+\cos x}$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

Arătați că $F$ primitivă pt. $f$ este s↑ pe $\mathbb{R}$

---

$E_1)$ $F$ primitivă pt. $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$ T1 "6 T1 2 b)

$E_2)$ $F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{3+\cos x}$

$E_3)$ $\cos x \in [-1,1] \Rightarrow 3+\cos x \in [2,4]$

$\Rightarrow 3+\cos x > 0 \Rightarrow \frac{1}{3+\cos x} > 0$

$E_4)$ $F'(x) > 0 \Rightarrow F$ s↑ pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ o primit. este s↑ pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3+\cos t}\,dt$, calculați

$\lim_{x\to\infty} F(x)$

---

$E_1)\ -1 \le \cos t \le 1 \ /+3$

$\Rightarrow 2 \le 3+\cos t \le 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\cos t} \le \frac{1}{2} \ / \int_0^x \ldots dt$

$E_4)\ \int_0^x \frac{1}{4}\,dt \le \int_0^x \frac{1}{3+\cos t}\,dt \le \int_0^x \frac{1}{2}\,dt$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot t\Big|_0^x \le F(x) \le \frac{1}{2} t\Big|_0^x$

$\frac{1}{4}(x-0) \le F(x) \le \frac{1}{2}(x-0)$

$\frac{x}{4} \le F(x) \le \frac{x}{2}$

$\searrow \quad \swarrow$

$\infty \qquad \infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$

Prof. Ovidiu Badescu