Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|x+1|\leq 24\right\}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y=2x-1$ cu parabola $y=2x^2-3x+1$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,\ldots,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii A, submulțimi care conțin exact 2 numere impare.

5p **5.** Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$, unde $A(1,-2)$ şi $B(3,4)$.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos 2x=\frac{1}{3}$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+my+m^2z=0\\ mx+m^2y+z=0\\ m^2x+y+mz=0\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.

5p **b)** Arătați că, pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluție (x_0,y_0,z_0) cu x_0,y_0,z_0 numere reale strict pozitive.

5p **c)** Arătați că rangul matricei sistemului este diferit de 2, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}(x+y-xy+1)$.

5p **a)** Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” admite element neutru.

5p **c)** Rezolvați ecuația $x*x*x=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(-x)}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\geq 2$.

Prof. Ovidiu Bădescu

MODEL BAC 2012 / VOL 1 M1

Găsiți numărul elementelor mulțimii

$$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x+1|\leq 24\}$$

E_1) Folosim $|f(x)|\leq r \Leftrightarrow f(x)\in[-r,r]$

E_2) $|x+1|\leq 24 \Leftrightarrow x+1\in[-24,24] \Leftrightarrow$

$$-24\leq x+1\leq 24 \mid -1$$

$$-25\leq x\leq 23$$

E_3) $x\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in[-25,23]\cap\mathbb{Z}=\{-25,-24,\dots,0,\dots,23\}$

E_4) Pentru a le număra, de la

-25 la -1 sunt 25 numere

0 este 1 număr

1 la 23 sunt 23 numere

E_5) În total sunt $25+1+23=49$ elemente

Prof. Ovidiu Badescu

BAC 2012/ M_şt/ I 2 MODEL

Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre $y=2x-1$ și $y=2x^2-3x+1$ I 29 I 2

E_1) pentru a găsi punctele de intersecție, rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases}$

E_2) $2x-1=2x^2-3x+1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \swarrow \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

E_3) $x_1=2 \Rightarrow y_1=2x_1-1 \Rightarrow y_1=3$

$x_2=\frac{1}{2} \Rightarrow y_2=2x_2-1 \Rightarrow y_2=1-1=0$

E_4) pct de intersecție sunt: $A(2;3)$
$B(\frac{1}{2};0)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{1+7x} = 1+x$$

$E_1)$ $\sqrt[3]{1+7x} = 1+x$

Cond.: $x \in \mathbb{R}$

$E_2)$ $\sqrt[3]{1+7x} = 1+x \mid ()^3 \Rightarrow 1+7x = (1+x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+7x = 1+3x+3x^2+x^3$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2-4x=0$

$\Rightarrow x(x^2+3x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \text{sau} \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$

$E_3)$ Din $x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ x_3 = \dfrac{-3-5}{2} = -4 \end{cases}$

$E_4)$ $S_f: x \in \{-4; 0; 1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\{1;2;\dots;10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale lui A, submulțimi care au exact 2 numere impare

---

E_1) în A, numerele impare sunt 1; 3; 5; 7; 9

E_2) pentru submulțimile cerute, ele au forma $M=\{a;b;c\}$ cu a, b impare și c par

E_3) trebuie să alegem 2 impare din 5, nu contează ordinea $\Rightarrow C_5^2$

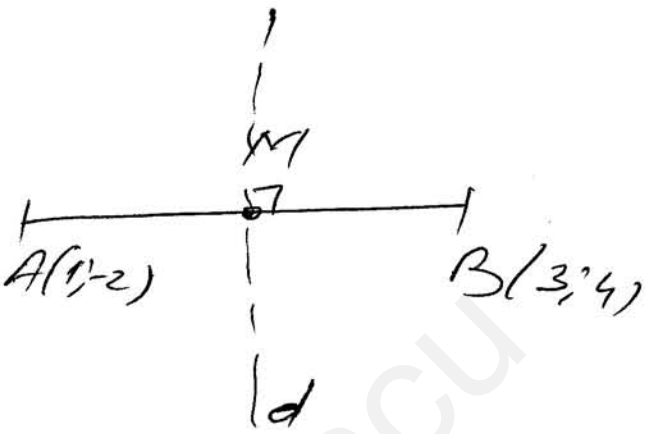
E_4) trebuie ales un nr. par din 2; 4; 6; 8; 10, deci tot din 5 $\Rightarrow C_5^1 = 5$ moduri

E_5) deoarece alegerea celor impare este independentă de alegerea celor pare $\Rightarrow$ regula produsului: $C_5^2 \cdot C_5^1 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} \cdot \frac{5!}{1!\cdot 4!} =$

$= \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot 1 = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2!\cdot 3!} = 10$

Prof. Ovidiu Bădescu

Determinați ecuația mediatoarei lui $[AB]$ unde $A(1;-2)$, $B(3;4)$



E_1) M mijl lui AB

$\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

$\Rightarrow M(2;1)$

E_2) d mediatoare $\Rightarrow d \perp AB$ prin mijl lui AB

E_3) $d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4+2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow m_d = -\frac{1}{3}$

E_4) ec. d: $y - y_M = m_d(x - x_M)$

$\Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2) \mid \cdot 3$

$3y - 3 = -x + 2$

$(\Rightarrow x + 3y - 5 = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

MODEL 2012 / T 6

T109
I/6

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos 2x = \frac{1}{3}$, se cere $\sin x$

$E_1)$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$E_2)$ $\cos 2x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sin^2 x = \frac{2}{3}$

$\sin^2 x = \frac{1}{3}$

$E_3)$ $\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x > 0$

$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ mx + m^2 y + z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \end{cases}$

Găsiți m pentru care $\det A = 0$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}$ $\underline{\underline{l_3 + l_2 + l_1}}$

$= \begin{vmatrix} 1+m+m^2 & m+m^2+1 & m^2+1+m \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}$

$= (1+m+m^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} =$

$= (1+m+m^2)(m^3 + m + m - m^4 - 1 - m^2)$

$E_2)$ $\det A = (1+m+m^2)(m^3 - m^4 + m - 1) =$

$= (1+m+m^2)(m^3(1-m) - (1-m)) =$

$= (1+m+m^2)((1-m)(m^3-1))$

$E_3)$ $\det A = 0 \Rightarrow 1+m+m^2 = 0$, $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow m_{1,2} \notin \mathbb{R}$

$1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$

$m^3 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Așadar, $m = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
(Ex 5)

Fie $\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ mx + m^2 y + z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$

Arătați că pentru nicio valoare a lui m, sist. nu are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 numere reale strict pozitive

---

E_1) Observăm că adunând ecuațiile obținem: $(1+m+m^2)x + (m+m^2+1)y + (m^2+1+m)z = 0$

$\Leftrightarrow (1+m+m^2)(x+y+z) = 0$

$E_2) \Rightarrow$ $m^2+m+1 = 0$, $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ $\Rightarrow$ fals

sau

$x+y+z = 0$ $(*)$

E_3) Dacă sistemul ar avea o soluție (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 strict pozitive

$\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 > 0$, contradicție cu

x_0, y_0, z_0 verifică $(*)$ adică e contradicție cu $x_0 + y_0 + z_0 = 0$

$\Rightarrow \nexists$ soluție (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 strict pozitive

Prof. Ovidiu Bădescu

VI.09

Fie $\begin{cases} x + my + m^2 z = 0 \\ mx + m^2 y + z = 0 \\ m^2 x + y + mz = 0 \end{cases}$, arătați

că rangul matricii sistemului este diferit

de 2, $\forall m \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{pmatrix}$, calculăm

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{l_3 + l_2 + (l_1)}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+m+m^2 & m+m^2+1 & m^2+1+m \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{\text{factor}}}$$

$$= (1+m+m^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = (1+m+m^2) \cdot$$

$$\cdot (m^3 + m^2 + m - m^4 - 1 - m^2)$$

$E_2)$ $\det A = (1+m+m^2)(m^3(1-m) - (1-m))$

$= (1+m+m^2)(1-m)(m^3-1)$

$E_3)$ $\det A = 0 \Rightarrow 1+m+m^2 = 0$, dar $\Delta < 0$ fals sau $1-m=0 \Rightarrow m=1$ sau $m^3=1 \Rightarrow m=1$

$E_4)$ Dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 3$

$E_5)$ Dacă $m=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\text{rang } A = 1$ (se arată ușor)

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x * y = \frac{1}{2}(x+y-xy+1)$. Verificați dacă $*$ este asociativă

E_1) $\forall x, y, z \in M \overset{(?)}{=} (x*y)*z = x*(y*z)$

E_2) $(x*y)*z = \left(\frac{1}{2}(x+y-xy+1)\right) * z =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x+y-xy+1) + z - \frac{1}{2}(x+y-xy+1)\cdot z + 1\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x+y-xy+1+2z-xz-yz+xyz-z+2}{2}\right] =$

$= \frac{x+y+z-xy-xz-yz+xyz+3}{4}$ (1)

E_3) $x*(y*z) = x*\left[\frac{1}{2}(y+z-yz+1)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}(y+z-yz+1) - x\cdot\frac{1}{2}(y+z-yz+1) + 1\right] =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+y+z-yz+1-xy-xz+xyz-x+2}{2} =$

$= \frac{x+y+z-yz-xy-xz+xyz+3}{4}$ (2)

E_4) Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $*$ asociativă

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$. Arătați că $*$ are el. neutru $e \in \mathbb{R}$

E_1) $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x * e = e * x = x$

E_2) $x * e = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + e - xe + 1) = x$

$\Leftrightarrow x + e - xe + 1 = 2x \Leftrightarrow e(1 - x) = 2x - x - 1$

$\Leftrightarrow e(1 - x) = x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

E_3) Deoarece relația este adevărată $\forall x \in \mathbb{R}$,

$e(1 - x) = -(1 - x) \Rightarrow e = -1 \in \mathbb{R}$ (1)

E_4) Arătăm că $*$ comutativă,

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y = y * x \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(x + y - xy + 1) = \frac{1}{2}(y + x - yx + 1)$ adev.

$\Rightarrow *$ comutativă $\Rightarrow x * e = e * x$ (2)

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow e = -1$ el. neutru

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$. Rezolvați ecuația $x * x * x = 3$

7.109 II.c)

$E_1)$ $x * x = \frac{1}{2}(x + x - x^2 + 1) = \frac{1}{2}(2x - x^2 + 1)$

$E_2)$ $x * x * x = (x * x) * x = \left(\frac{1}{2}(2x - x^2 + 1)\right) * x$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2x - x^2 + 1) + x - \frac{1}{2}(2x - x^2 + 1) \cdot x + 1\right]$

$E_3)$ $x * x * x = \frac{1}{2}\left(\frac{2x - x^2 + 1 + 2x - 2x^2 + x^3 - x + 2}{2}\right)$

$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{4}$

$E_4)$ Dar, $x * x * x = 3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = 12$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow D_9 = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$E_5)$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	−3	3	−9
1	1	−2	1	−8 ≠ 0
−1	1	−4	7	−2 ≠ 0
3	1	0	9	0

$\Rightarrow (x - 3)(x^2 + 0 \cdot x + 9) = 0 \rightarrow$ $x = 3$ sau $x^2 + 9 = 0$

$\Delta = 0 - 36 < 0$ fals

$\Rightarrow x = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$

Calculati $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(-x)}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(-x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{-x^3+3x+2}$

$\overset{grP=grQ}{=}\dfrac{1}{-1}=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$, arătați că $f\searrow$ pe $[-1;1]$

$E_1)$ $f'(x)=(x^3-3x+2)'=3x^2-3$

$E_2)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$E_3)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f	$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	

$E_4)$ din tabel $\Rightarrow f\searrow$ pe $[-1;1]$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+2$, găsiți $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale distincte

---

E_1) Facem tabel de variație pentru f

E_2) $f'(x)=(x^3-3x+2)'=3x^2-3$

E_3) $f'(x)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

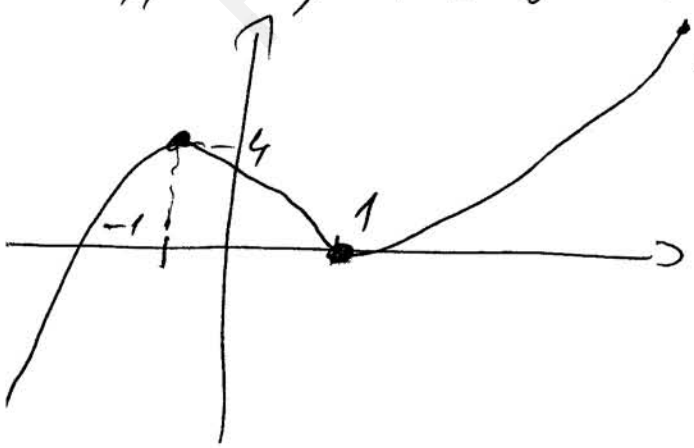
x	$-\infty$		-1		1		∞
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

$$f(-1)=-1+3+2=4;\quad f(1)=1-3+2=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^3-3x+2)=\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$$

E_4) schițat, graficul este



$\infty,\infty)$

E_5) $m<0\Rightarrow x_1\in(-\infty;-1)$

$m=0\Rightarrow x_1\in(-\infty;-1),\ x_2=1$

$m\in(0;4)\Rightarrow x_1\in(-\infty;-1),\ x_2\in(-1;1),\ x_3\in(1;\infty)$

$m=4\Rightarrow x_1=-1;\ x_2\in(1;\infty)$

$m\in(4;\infty)\Rightarrow x_1\in(1;\infty)$

E_6) ec. are 3 rad reale distincte $\Leftrightarrow m\in(0;4)$

Prof. Ovidiu Badescu

V109
III 2a)

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$

Calculați I_2

E1) $I_2 = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx =$

$= \int_0^1 1 dx - 2\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx$

E2) $I_2 = x\Big|_0^1 - 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1$

$I_2 = 1-0-\frac{2}{3}(1-0)+\frac{1}{5}(1-0)$

$I_2 = \overset{15}{1} - \frac{\overset{5}{2}}{3} + \frac{\overset{3}{1}}{5} = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, demonstrați că I_n este convergent, $\forall n \geq 1$

E_1) Vom arăta că I_n monoton și mărginit

E_2) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx =$

$= \int_0^1 \left[(1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n\right] dx =$

$= \int_0^1 (1-x^2)^n (1-x^2-1)\, dx =$

$= \int_0^1 (1-x^2)^n \cdot (-x^2)\, dx$

E_3) Dar, $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 \in [0;1] \Rightarrow 1-x^2 \geq 0$

$\Rightarrow (1-x^2)^n (-x^2) \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_n \searrow$ (1)

E_4) Dacă $I_n \searrow \Rightarrow I_n \leq I_1 \Rightarrow I_n$ mărg superior

E_5) Dacă $x \in [0;1] \Rightarrow (1-x^2)^n \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 0 \Rightarrow I_n$ mărg inferior

$E_4) \Rightarrow I_n$ mărginit (2)

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow I_n$ convergent

Prof. Ovidiu Badescu