VARA REZERVA, 2011

Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a și b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10,11,12,\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ și $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.

Prof. Camelia Bădescu

V 110
I/1

Calculați: $\log_7(3+\sqrt{2}) + \log_7(3-\sqrt{2})$

E1) $N = \log_7(3+\sqrt{2}) + \log_7(3-\sqrt{2})$

E2) $N = \log_7[(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})]$

$N = \log_7(9-2) = \log_7 7 = 1$

Obs.: s-a folosit

$\log_b x + \log_b y = \log_b(xy)$

și $\log_b b = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
I/2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$

Găsiți a și b știind că G_f conține $A(2;3)$ și $B(-1;0)$

$E_1)$ $A(2;3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3 \Rightarrow 4+2a+b=3$

$\Rightarrow \boxed{2a+b=-1}$

$B(-1;0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0 \Rightarrow 1-a+b=0$

$\Rightarrow \boxed{-a+b=-1}$

$E_2)$ Avem sistemul $\begin{cases} 2a+b=-1 \\ -a+b=-1 \end{cases}$

„$-$”: $3a=0 \Rightarrow a=0$

$E_3)$ $a=0$, înlocuim $\Rightarrow b=-1$

$E_4)$ $f(x)=x^2-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V110
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $3^x + 3^{x+1} = 36$

$E_1)$ $3^x + 3^{x+1} = 36 \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 36$

$E_2)$ not $3^x = t \Rightarrow t + 3t = 36$

$4t = 36 \Rightarrow t = 9$

$E_3)$ Dar, $t = 3^x \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V110 I/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un nr. din $\{10; 11; 12; \dots; 99\}$, acesta să fie divizibil cu 4

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: câte nr. sunt în $\{10; 11; \dots; 99\} \Rightarrow$ de la 1 la 99 sunt 99, scădem pe cele de la 1 la 9 adică 9

$\Rightarrow$ 90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: câte nr. din mț. sunt divizibile cu 4. Acestea sunt

$12; 16; 20; \dots\dots; 96$ care sunt în progr aritm cu $a_1 = 12$, $a_n = 96$ și $r = 4$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)\cdot 4$

$\Rightarrow 84 = 4n - 4 \Rightarrow 4n = 88 \Rightarrow n = 22$

$E_4)$ $P = \dfrac{22}{90} = \dfrac{11}{45}$

Obs.: se puteau și numără cele $\vdots 4$ între 10 și 99 și se lua punctaj maxim

Prof. Ovidiu Bădescu

V110 I/5

Fie $M(2;-1)$, $N(-1;3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$

$E_1)$ $\overrightarrow{OM}=(x_M-x_O)\vec{i}+(y_M-y_O)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=(2-0)\vec{i}+(-1-0)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=2\vec{i}-\vec{j}$

$E_2)$ Analog, $\overrightarrow{ON}=(x_N-x_O)\vec{i}+(y_N-y_O)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{ON}=(-1-0)\vec{i}+(3-0)\vec{j}$

$\Rightarrow \overrightarrow{ON}=-\vec{i}+3\vec{j}$

$E_3)$ $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=(2\vec{i}-\vec{j})+(-\vec{i}+3\vec{j})=$

$=\vec{i}+2\vec{j} \Rightarrow$ coord. sunt $(1;2)$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți latura unui Δ echilateral cu aria $4\sqrt{3}$ V110 I/6

$E_1)\ \mathcal{A} = \dfrac{l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(\widehat{l_1, l_2})}{2} \overset{\Delta \text{ echil}}{=\!=} \dfrac{l \cdot l \sin 60^\circ}{2}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \dfrac{l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$

(formula poate fi și memorată)

$E_2)\ \mathcal{A} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 = \dfrac{16\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow l^2 = 16 \Rightarrow l = 4$

Prof. Ovidiu Băgescu

V110

Fie $A_n(2^n; 3^n)$. Se cere ec. dreptei A_0A_1 II 1a)

E_1) Ec. dreptei M_1M_2 este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

E_2) $A_n(2^n; 3^n) \Rightarrow A_0(2^0; 3^0) \Rightarrow A_0(1; 1)$

$\Rightarrow A_1(2; 3)$

E_3) ec. A_0A_1: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y + 3 - 2 - 3x - y = 0$

$\Rightarrow -2x + y + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x - y - 1 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 110
II 16)

Fie $A_n(2^n; 3^n)$, arătați că A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare

---

$E_1)$ A_1, A_2, A_3 coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ $A_1(2;3)$, $A_2(4;9)$, $A_3(8;27)$

$E_3)$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 18 + 24 + 108 - 72 - 54 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 150 - 138 = 0 \Rightarrow 12 = 0$ fals

$E_4) \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ pct nu sunt coliniare

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A_n(2^n; 3^n)$, determinați numărul natural n pentru care aria $\Delta A_n A_{n+1} A_{n+2}$ este egală cu 216

$E_1)$ $\text{Aria}_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

$E_2)$ $A_n(2^n; 3^n)$, $A_{n+1}(2^{n+1}; 3^{n+1})$, $A_{n+2}(2^{n+2}; 3^{n+2})$

$E_3)$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \text{factor } 2^n \text{ pe } C_1 \\ \hline\hline \text{factor } 3^n \text{ pe } C_2 \end{matrix}$

$= 2^n \cdot 3^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2^n \cdot 3^n \cdot (3 + 4 + 18 - 12 - 9 - 2)$

$= 2^n \cdot 3^n \cdot 2$

$E_4)$ $\frac{1}{2}|\Delta| = 216 \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot |6^n \cdot 2| = 216 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 6^n \cdot 2 = 216$

$6^n = 216$

216	2
108	2
54	2
27	3
1	

$\Rightarrow 6^n = 2^3 \cdot 3^3 \Rightarrow 6^n = 6^3$

$\Rightarrow \boxed{n = 3}$

Prof. Ovidiu Pănescu

VIII.10

II 2a)

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$

Verificați dacă elementul neutru al legii este $e = 3$

$E_1)$ $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \circ e = e \circ x = x$

$E_2)$ $x \circ e = \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xe - x - e + 3) = x \Leftrightarrow$

$xe - x - e + 3 = 2x \Leftrightarrow xe - e = 3x - 3$

$\Leftrightarrow e(x-1) = 3(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 3$ (1)

$E_3)$ $e \circ x = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ex - e - x + 3) = x \Leftrightarrow$

$ex - e - x + 3 = 2x \Leftrightarrow xe - e = 3x - 3$

$\Leftrightarrow e(x-1) = 3(x-1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 3$ (2)

$E_4)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow e = 3$ el neutru

Obs.: mai era și met II:

$E_1)$ arăt $\circ$ comut $\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_2)$ $\circ$ are el neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$x \circ e = e \circ x = x$

$E_3)$ Din $x \circ e = x$ găsim $e = 3 \in \mathbb{R}$ } $\Rightarrow e = 3$

$E_4)$ Deoarece $\circ$ comut $\Rightarrow x \circ e = e \circ x$

este el neutru pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$. Se știe că elementul neutru este $e = 3$, găsiți simetricul elementului 2 în raport cu $\circ$

E_1) Găsim simetricul în cas general

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ cu $x \circ x' = x' \circ x = e$

E_2) $x \circ x' = e \Rightarrow \frac{1}{2}(xx' - x - x' + 3) = 3$

$\Leftrightarrow xx' - x - x' + 3 = 6$

$x'(x - 1) = 3 + x$

$\forall x \neq 1 \Rightarrow x' = \frac{3+x}{x-1}$

$\forall x = 1 \Rightarrow x' \cdot 0 = 4$ fals

E_3) $x' \circ x = e \Rightarrow \frac{1}{2}(x'x - x' - x + 3) = 3$

$\Rightarrow x'x - x' - x + 3 = 6$

$x'(x - 1) = 3 + x$

$\forall x \neq 1 \Rightarrow x' = \frac{3+x}{x-1}$

$\forall x = 1 \Rightarrow x' \cdot 0 = 4$ fals

E_4) Așadar, $\forall x \neq 1 \Rightarrow x' = \frac{3+x}{x-1}$

$\forall x = 2 \Rightarrow x' = \frac{3+2}{2-1} \Rightarrow x' = 5$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$, arătați că mulțimea $H = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\circ$"

E_1) $\forall x, y \in H \overset{(?)}{\Rightarrow} x \circ y \in H$

E_2) $x \in H \Rightarrow x = 2k+1$

$y \in H \Rightarrow y = 2p+1$

E_3) $x \circ y = \frac{1}{2}\left((2k+1)(2p+1) - (2k+1) - (2p+1) + 3\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4kp + 2k + 2p + 1 - 2k - 1 - 2p - 1 + 3\right)$

$= \frac{1}{2}(4kp + 2)$

$= \frac{1}{2} \cdot 2(2kp + 1)$

$= 2kp + 1 \in H$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$

Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, $\forall x>0$

$E_1)$ $f'(x)=(\ln x+e^x)'=\frac{1}{x}+e^x$

$E_2)$ $xf'(x)=x\left(\frac{1}{x}+e^x\right)=1+xe^x$

$\Rightarrow xf'(x)=1+xe^x$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$

Determinați ecuația tangentei la G_f în $A(1,e)$

E_1) Ec. tg în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

E_2) în cazul nostru, în $A(1,e)\Rightarrow x=1$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

E_3) $f(1)=\ln 1+e^1=0+e=e$

E_4) $f'(x)=\left(\ln x+e^x\right)'=\frac{1}{x}+e^x\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1)=1+e$

E_5) ec. tg: $y-e=(1+e)(x-1)$

$\Rightarrow y-e=x-1+xe-e$

$\Rightarrow x-y-1+xe=0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+e^x$

Calculați: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

E1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x+e^x}{x}\ \underset{l'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+e^x}{1}=\infty$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Se cere aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$

E_1) $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$ în cazul nostru

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |3x^2 + 2x + 1| \, dx$$

E_2) pt a găsi semnul lui $3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ mod I: $x \in [0, 1] \Rightarrow 3x^2 + 2x + 1 > 0$

sau

mod II: $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow$ are semnul lui a

$3x^2 + 2x + 1$	$+ + + + + + +$

E_3) $\mathcal{A} = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx =$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 =$$

$$= (1 - 0) + (1 - 0) + (1 - 0) = 3$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=3x^2+2x+1$, arătați că orice primitivă a lui f este concavă pe $(-\infty,-\frac{1}{3})$

$E_1)$ F primit. pt $f \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx$

$E_2)$ pt a arăta că F concavă arătăm că $F''(x)\leq 0$

$E_3)$ F primit. pt $f \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

$\Rightarrow F'(x)=3x^2+2x+1$

$E_4)$ $F''(x)=(3x^2+2x+1)'=6x+2$

$F''(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{6}$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

x		$-\frac{1}{3}$	
F''	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$
F	$\cap$		$\cup$

Din tabel $\Rightarrow$ pt $x\in(-\infty,-\frac{1}{3})$

$\Rightarrow F$ concavă

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, arătați că

$\forall a \geq 2$ avem: $\int_0^a f(x)dx \geq 3a^2 + 2$

$E_1) \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (3x^2 + 2x + 1)dx =$

$= 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^a + 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^a + x\Big|_0^a =$

$= (a^3 - 0) + (a^2 - 0) + (a - 0)$

$= a^3 + a^2 + a$

$E_2) \int_0^a f(x)dx \geq 3a^2 + 2$

$\Leftrightarrow a^3 + a^2 + a \geq 3a^2 + 2$

$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a - 2 \geq 0$

$a^2(a-2) + (a-2) \geq 0$

$\Rightarrow (a-2)(a^2+1) \geq 0$

$E_3)$ Din ip $\Rightarrow a \geq 2 \Rightarrow a - 2 \geq 0$

și $a^2 + 1 > 0$ (pătrat perfect)

$\Rightarrow (a-2)(a^2+1) \geq 0$

Prof. Ovidiu Bădescu