Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1, x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p **5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.

5p **6.** Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP, știind că $MN=4$, $MP=5$ și $NP=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați A^2-3A.

5p **b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

5p **c)** Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.

2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

5p **a)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **b)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

5p **c)** Arătați că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_2&x_3&x_1\\x_3&x_1&x_2\end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Arătați că $f(x)>0$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+10}$.

5p **a)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-10}^{10}f(x)dx=2\int_{0}^{10}f(x)dx$.

Găsiți x pentru care $x-1, x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progr aritmetice

V109
I/1

E_1) Folosim a, b, c progr aritm $\Leftrightarrow a+c=2b$

E_2) în cazul nostru, $(x-1)+(3x-1)=2(x+1)$

$\Rightarrow 4x-2=2x+2$

$\Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
I/2

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$.

Calculați: $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdots f(10)$

$E_1)$ $f(0)=5$

$f(1)=4$

- - - -

$E_2)$ observăm că $f(5)=5-5=0$

$\Rightarrow f(0)f(1)\cdots f(10)=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x-1} = x-3$$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1,\infty) = I_1 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3,\infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 = [3,\infty)$

E_2) $\sqrt{x-1} = x-3 \quad |(\,)^2$

$x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow x-1 = x^2-6x+9$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

E_3) $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$

$x_1 = 5 \in I_C \Rightarrow$ soluție

$x_2 = 2 \notin I_C \Rightarrow$ nu e soluție

E_4) $S_p: x = 5$

Prof. Ovidiu Rădescu

Găsiți numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente

V/109
I/4

E_1) TEORIE: nr. submulțimilor ordonate cu k elemente din n posibile este A_n^k

E_2) în cazul nostru, $A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} =$

$$= \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
I/5

Calculați distanța de la $A(2;3)$ la punctul de intersecție al dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$

E_1) pct de $\cap$ al dreptelor

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ -x+2y=6 \end{cases} \Big| \cdot 2$$

„+": $3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3} = 6$

înlocuim în $2x-y=6$

$\Rightarrow 12-y=6 \Rightarrow y=6$

$\Rightarrow M(6;6)$

E_2) dist de la $A(2;3)$ la $M(6;6)$

$$\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2} = \sqrt{4^2+3^2} =$$

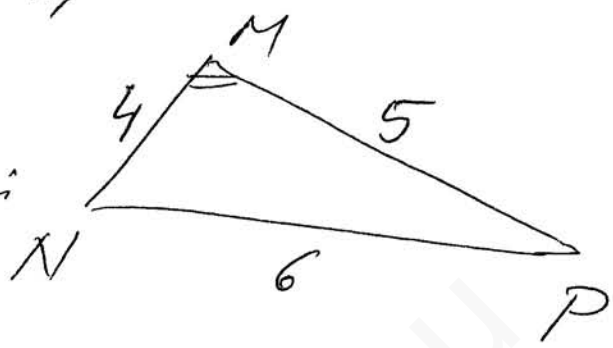
$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109

Calculați $\cos(M)$ în $\triangle MNP$ dacă I/6

$MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$



E_1) Din T cosinusului

$$NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos M$$

E_2) înlocuim $\Rightarrow$

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos M$$

$$36 = 25 + 16 - 40 \cos M$$

$$36 = 41 - 40 \cos M$$

$$40 \cos M = 41 - 36$$

$$40 \cos M = 5 \Rightarrow \cos M = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, calculați A^2-3A II 1.a)

$E_1)\ A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -1-2\\ -2-4 & 2+4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}$

$E_2)\ 3A=3\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}$

$E_3)\ A^2-3A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

Prof. Ovidiu Dăescu

I/109
II 16)

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$

Demonstrați că $X(a)X(b)=X(a+b+3ab)$

$E_1)$ $X(a)X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=$

$=I_2+bA+aA+abA^2$

$E_2)$ Dar, $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -6 & 6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2=3A$

$E_3)$ înlocuind în $E_1)$

$\Rightarrow X(a)X(b)=I_2+bA+aA+3abA=$

$=I_2+(a+b+3ab)A=$

$=X(a+b+3ab)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109

Fie $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$ și $X(a)=I_2+aA$, $\forall a\in\mathbb{Z}$ II 1c)

Arătați că $X(a)$ inversabilă, $\forall a\in\mathbb{Z}$

E_1) Vom arăta că $\det(X(a))\neq 0$, $\forall a\in\mathbb{Z}$

E_2) Prin reducere la absurd, presupunem că $\det(X(a))=0$

E_3) $X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&-a\\-2a&2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1&-a\\-2a&2a+1\end{pmatrix}$

E_4) Dacă $\det(X(a))=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a+1&-a\\-2a&2a+1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow(a+1)(2a+1)-2a^2=0$

$\Leftrightarrow 2a^2+a+2a+1-2a^2=0$

$\Leftrightarrow 3a+1=0\Leftrightarrow 3a=-1$

$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$

Dar, $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=-\frac{1}{3}$ contradicție

$\Rightarrow\det X(a)\neq 0$, $\forall a\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$X(a)$ inversabilă, $\forall a\in\mathbb{Z}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$ cu rădăcinile $\underline{\text{II}}\,2a)$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$

Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

E_1) Există formula

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 \text{ unde}$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

E_2) În cazul nostru,

$$S_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$$

$$S_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (-2)^2 - 2\cdot(-5) =$$

$$= 4 + 10 = 14$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
II 26)

Fie $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$ cu rad. x_1, x_2, x_3. Găsiți $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

$E_1)$ $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

$E_2)$ $\frac{\frac{x_2x_3}{1}}{x_1} + \frac{\frac{x_1x_3}{1}}{x_2} + \frac{\frac{x_1x_2}{1}}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} =$

$= \frac{S_2}{S_3}$ unde $S_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$S_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{m}{1} = -m$

$E_3)$ Egalând cei doi membri $\Rightarrow$

$\Rightarrow -2 = \frac{-5}{-m} \Leftrightarrow -2 = \frac{5}{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2m = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109

Fie $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Arătați că Δ este număr natural, $\forall m \in \mathbb{R}$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$

$E_1)\ \Delta \overset{l_1 = l_1 + l_2 + l_3}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2+x_3+x_1 & x_3+x_1+x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$

$= (x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} =$

$= (x_1+x_2+x_3)(x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)$

$E_2)$ Dar, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2$ și

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$E_3) \Rightarrow \Delta = S_1(S_2 - (S_1^2 - 2S_2)) =$

$= S_1(S_2 - S_1^2 + 2S_2) = S_1(3S_2 - S_1^2) =$

$= -2(3\cdot(-5) - (-2)^2) = -2(-15-4) =$

$= -2 \cdot (-19) = 38 \in \mathbb{N}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
III 1a)

Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$

Calculati $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

E_1) Vom folosi: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$,

in cazul nostru $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

E_2) $f'(x)=\left(e^x-\frac{1}{x}\right)'=e^x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$

$=e^x+\frac{1}{x^2}$

E_3) $f'(2)=e^2+\frac{1}{2^2}=e^2+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=e^2+\frac{1}{4}$

Prof. Ovidiu Badescu

V109
III 16)

Fie $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$

Arătați că $f(x)>0,\ \forall x\in[1;\infty)$

E1) TEORIE: Ar a demonstra inegalități; facem tabel de variație pentru f

E2) $f'(x)=\left(e^x-\frac{1}{x}\right)'=e^x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=e^x+\frac{1}{x^2}$

E3) $f'(x)=0\Rightarrow$ fals deoarece $e^x>0$ și $\frac{1}{x^2}>0$

$\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in[1;\infty)\Rightarrow f\nearrow$

E4)

x	1	
f'	$+$	$+$
f	$f(1)$	$\nearrow$

$f(1)=e^1-\frac{1}{1}=e-1=2,7\ldots-1=1,7\ldots$

$\Rightarrow f(1)>0$, $f\nearrow$ $\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in[1;\infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

V109
III 1c)

Fie $f:[1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$

Arătați că G_f nu are asimptotă spre ∞

E_1) <u>as. orizontale spre ∞</u>:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)\overset{\infty-0}{=\!=}\infty\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oriz spre ∞

E_2) <u>as. oblice spre ∞</u>

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-\frac{1}{x}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\overset{l'H}{}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\overset{\infty+0}{=\!=}$$

$$=\infty\Rightarrow m\notin\mathbb{R}$$

$\Rightarrow G_f$ nu are as. oblică spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
III 2a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$

Calculați volumul corpului obținut prin rotirea în jurul lui Ox a graficului lui $g:[0;3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$

E_1) Din ip $\Rightarrow g:[0;3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x^2+10}$

E_2) $V=\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_0^3\sqrt{x^2+10}\,dx=$

$=\pi\int_0^3(x^2+10)\,dx$

E_3) $V=\pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+10x\Big|_0^3\right)=$

$=\pi\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{0}{3}\right)+10(3-0)\right]=$

$=\pi\left(\frac{1}{3}+30\right)=\frac{91\pi}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V109
III26)

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+10}$.

Demonstrați că orice primitivă F a lui f este $\nearrow$ pe $\mathbb{R}$

E_1) F primitivă a lui $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

E_2) Din $F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = \sqrt{x^2+10}$

Dar, $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+10 \geq 10 \Rightarrow x^2+10 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+10} > 0 \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow F_s \nearrow$ pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

V109
III 2c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+10}$

Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)dx = 2\int_{0}^{10} f(x)dx$

E_1) TEORIE: Dacă f funcție pară $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

E_2) în cazul nostru, $f:[-10;10]\to\mathbb{R}$ / deoarece capetele integralei sunt -10 și 10)

Vom arăta că f f_{cd} pară, adică $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+10}=\sqrt{x^2+10}=f(x)$$

$\Rightarrow D_f$ simetric
$f(-x)=f(x)$ $\Big\}\Rightarrow f$ pară

E_3) f pară $\Rightarrow \int_{-10}^{10} f(x)dx = 2\int_{0}^{10} f(x)dx$

Prof. Ovidiu Badescu