Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_6 3+\log_6 12$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2=4A_n^1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ și $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.

5p **6.** Calculați $\cos 40^\circ+\cos 140^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-y+z=0\\ x+my-z=0\\ x-2y+z=0\end{cases}$, unde m este parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1,2,5)$ este o soluție a sistemului.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2*2=x*4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)+\dfrac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & x>1\\ \dfrac{x-1}{x}, & 0<x\leq 1\end{cases}$.

5p **a)** Calculați $\displaystyle\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}dx$.

5p **b)** Fie $g:(0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$. Determinați primitiva funcției g, primitivă al cărei grafic conține punctul $A(1,5)$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^e f(x)dx$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați $\log_6 3 + \log_6 12$

E1) folosim $\log_b A + \log_b B = \log_b (A \cdot B)$

E2) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \cdot 12) = \log_6 36$

E3) folosim $\log_b A^n = n \log_b A$

$\Rightarrow \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$

pt că $\log_b b = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Determinați coordonatele vârfului funcției $f(x)=2x^2-x+3$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$E_2)$ $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$

$$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-1)^2-4\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 2}=-\frac{1-24}{8}=\frac{23}{8}$$

$E_3)$ $V\left(\frac{1}{4};\frac{23}{8}\right)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$7^x + 7^{x+1} = 392$$

$E_1)$ Ec.: $7^x + 7^x \cdot 7^1 = 392$

$$\Rightarrow 7^x(1+7) = 392$$

$$7^x \cdot 8 = 392$$

$E_2)$ $7^x = \frac{392}{8} \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow 7^x = 7^2$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dacă

$$C_n^2 = 4A_n^1$$

E_1) folosim: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ și

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

E_2) Ec $\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 4 \cdot \frac{n!}{(n-1)!}$

$\Leftrightarrow (n-1)! = 8(n-2)!$

E_3) Descompunem pe cel mai mare în funcție de cel mai mic $\Rightarrow$

$(n-1)! = (n-2)!(n-1)$

E_4) Ec.: $(n-2)!(n-1) = 8(n-2)! \Rightarrow$

$n-1 = 8 \Rightarrow n = 9 \in I_C$

$\Rightarrow$ $n = 9 \in \mathbb{N}$ și $n = 9 \geq 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(0;-2)$, $B(4;m)$ cu $m \in \mathbb{R}$.

Se cere $m=?$ dacă $AB=5$

E1) Folosim: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

E2) $AB=5 \Rightarrow \sqrt{(4-0)^2+(m+2)^2}=5$

$\Rightarrow \sqrt{16+m^2+4m+4}=5 \quad |()^2$

$\Rightarrow m^2+4m+20=25$

$m^2+4m-5=0$

E3) $m_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-5)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}$

$m_{1,2}=\frac{-4\pm6}{2}$ $\begin{cases} \frac{2}{2}=1 \\ \frac{-10}{2}=-5 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

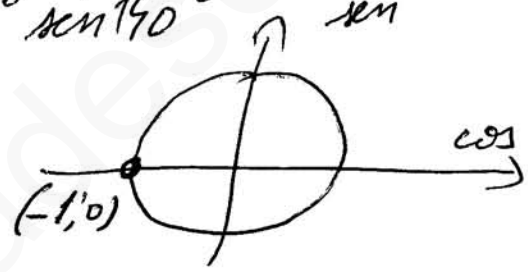
Calculați: $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$

E_1) Exprimăm cenul din unghiuri în funcție de celălalt și de axe

E_2) $\cos 40^\circ = \cos(180^\circ - 140^\circ) =$

$= \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \cos 140^\circ + \underbrace{\sin 180^\circ}_{0} \sin 140^\circ$

$= -\cos 140^\circ$



E_3) $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ = -\cos 140^\circ + \cos 140^\circ = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Se cere $\det A$

$E_1)$ $\det A = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 1 - 2 - m - 2m + 1 =$

$= m^2 - 3m$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Se cere $m = ?$ dacă $(-1; 2; 5)$ este soluție

$E_1)$ $(-1; 2; 5)$ soluție pentru sistem $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1; 2; 5)$ verifică sistemul $\Leftrightarrow$

înlocuind în sistem avem relații adevărate

$E_2)$ $(-1; 2; 5)$ soluție $\Leftrightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{matrix}$

$E_3)$ înlocuim $\Rightarrow \begin{cases} -m - 2 + 5 = 0 \\ -1 + 2m - 5 = 0 \\ -1 - 4 + 5 = 0 \text{ adev.} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \\ 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow S_f : m = 3$

Prof. Ovidiu Pădescu

Fie $\begin{cases} mx - y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Se cere $m = ?$ dacă sistemul are doar soluția $(0; 0; 0)$

E1) „Este un sistem liniar omogen $\Rightarrow$ el are doar soluția nulă $\Leftrightarrow \det S \neq 0$"

E3) $\det S \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 1 - 2 - m - 2m + 1 \neq 0$

$m^2 - 3m \neq 0$

$m(m-3) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \text{și} \\ m \neq 3 \end{cases}$

E4) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

Prof Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = xy + x + y$

Arătați că $*$ asociativă

$E_1) \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

$E_2) (x * y) * z = (xy + x + y) * z =$

$= (xy + x + y)z + (xy + x + y) + z =$

$= xyz + xz + yz + xy + x + y + z =$

$= xyz + (xz + yz + xy) + (x + y + z) \quad (1)$

$E_3) x * (y * z) = x * (yz + y + z) =$

$= x(yz + y + z) + x + (yz + y + z) =$

$= xyz + xy + xz + x + yz + y + z =$

$= xyz + (xy + xz + yz) + (x + y + z) \quad (2)$

$E_4)$ Din $(1) + (2) \Rightarrow *$ asociativă

Prof. Ovidiu Banescu

Fie $x * y = xy + x + y$, determinați elementul neutru al legii

---

E_1) Vom arăta că $*$ comutativă

$\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x * y = y * x$

$\left.\begin{array}{l} x * y = xy + x + y \\ y * x = yx + y + x \end{array}\right\} \Rightarrow$ egalitate $\Rightarrow *$ comut

E_2) $*$ are element neutru pe $\mathbb{R}$

$\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ să avem:

$x * e = e * x = x$

E_3) $x * e = x \Rightarrow xe + x + e = x$

$\Rightarrow (x+1)e = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{e = 0}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

E_4) Deoarece $*$ comut $\Rightarrow x * e = e * x$

$\Rightarrow e = 0$ e el neutru

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = xy + x + y$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^2 * 2 = x * 4$

$E_1)$ $x^2 * 2 = x * 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \cdot 2 + x^2 + 2 = x \cdot 4 + x + 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x^2 + 2 = 5x + 4$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Big/ \begin{matrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}$

Arătați că $f'(x)=\frac{-x-5}{(x-1)^3}$

$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{x+2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x+2)'\cdot(x-1)^2-(x+2)\cdot(x-1)^2)'}{(x-1)^4}$

$E_2)\ f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)^2-(x+2)\cdot 2(x-1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^4}$

$f'(x)=\frac{(x-1)\left[x-1-2(x+2)\cdot 1\right]}{(x-1)^{4\ 3}}$

$f'(x)=\frac{x-1-2x-4}{(x-1)^3}=\frac{-x-5}{(x-1)^3}$

Prof Ovidiu Balescu

Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$.

Determinați ecuația asimptotei verticale

$E_1)$ $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

$E_2)$ <u>as. verticale</u> : se calculează în capetele deschise și finite ale D_f, adică în $x = 1$

$E_2)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{(x-1)^2} \overset{\frac{3}{0+}}{=\!=} \infty \Rightarrow x = 1$ as. vert. la stg

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x+2}{(x-1)^2} \overset{\frac{3}{0+}}{=\!=} \infty \Rightarrow x = 1$ as. vert. la dreapta

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)^2}$. Arătați că

$$f(x)+\frac{1}{12}\geq 0,\ \forall x\in(-\infty;1)$$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{x+2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x+2)'(x-1)^2-(x+2)((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=$

$$=\frac{1\cdot(x-1)^2-(x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)[x-1-2x-4]}{(x-1)^{4\,3}}$$

$$=\frac{-x-5}{(x-1)^3}$$

$E_2)$ semnul lui $f'(x)$

$-x-5=0\Rightarrow x=-5$

$(x-1)^3=0\Rightarrow x=1$

x		-5		1
$-x-5$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	$-\ -\ -$
$(x-1)^3$	$-\ -\ -$	$-$	$-\ -\ -$	$0\ +\ +$
$\frac{-x-5}{(x-1)^3}$	$-\ -\ -$	0	$+$	$\|\ -\ -$

$E_3)$

x		-5		1	
f'	$-\ -\ -$	0	$+\ +$	$\|$	$-\ -\ -\ -$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{12}$	$\nearrow$		$\searrow$

Ne interesează pentru $x\in(-\infty;1)\Rightarrow$ hașurăm

În tabel, $f(-5)=\frac{-5+2}{(-5-1)^2}=\frac{-3}{(-6)^2}=\frac{-3}{36}=\frac{-1}{12}$

Din tabel $\Rightarrow f(x)\geq -\frac{1}{12}\Rightarrow \boxed{f(x)+\frac{1}{12}\geq 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x>1\\ \frac{x-1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

Calculați $\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}\,dx$

E_1) f schimbă forma în $x=1\Rightarrow x\in[2;e]$ f are aceeași formă, adică $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

E_2) $I=\int_2^e \frac{f(x)}{\ln x}\,dx=\int_2^e \frac{\frac{\ln x}{x}}{\ln x}\,dx=$

$=\int_2^e \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,dx=\int_2^e \frac{1}{x}\,dx=$

$=\ln|x|\Big|_2^e=\ln e-\ln 2=1-\ln 2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x>1\\ \frac{x-1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$

și $g:(0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$. Determinați primitiva lui g al cărei grafic conține punctul $A(1;5)$

$E_1)$ $g:(0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)\Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{x}$

$E_2)$ G o primitivă a lui $g\Rightarrow G(x)=\int g(x)\,dx=$

$$=\int\frac{x-1}{x}dx=\int\frac{x}{x}dx-\int\frac{1}{x}dx=x-\ln x+C$$

$E_3)$ Așadar, $G(x)=x-\ln x+C$

Dar, G conține $A(1;5)\Rightarrow G(1)=5$ $\Big\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-\underbrace{\ln 1}_{0}+C=5\Rightarrow C=4$$

$$\Rightarrow G(x)=x-\ln x+4$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x}, & x>1\\ \frac{x-1}{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$

Calculați $\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\,dx$

E_1) Deoarece f schimbă forma în $x=1$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{e} f(x)\,dx=$$

$$=\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x-1}{x}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx}_{I_2}$$

E_2) $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x-1}{x}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x}{x}\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x}\,dx=$

$$=x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}-\ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-0+\ln\frac{1}{2}$$

E_3) $I_2=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$t=\ln x\,(\,)'\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$, $x=1\Rightarrow t=\ln 1=0$, $x=e\Rightarrow t=\ln e=1$

$$I_2=\int_0^1 t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$E.I.T.$ $-\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

Prof. Ovidiu Găescu