Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=6$ și $a_3=5$. Calculați a_6.

5p **2.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2-x-3\leq 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.

5p **4.** După o scumpire cu 5%, prețul unui produs crește cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ și $B(5,0)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC=9$ și $m(\sphericalangle BAC)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & y\\ 1 & x+1 & y+1\end{vmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați $D(-1,1)$.

5p **b)** Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $D(x,2010)=1$.

5p **c)** Demonstrați că $D(x,y)\cdot D(x,-y)=D(x^2,y^2)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Calculați $1*2*\ldots*2011$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+3^x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\leq 3^b-3^a$, oricare ar fi numerele reale a,b cu $a\leq b$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^ne^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}dx$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2)dx\geq\frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$.

Dacă an mogr aritm cu $a_2 = 6$ și $a_3 = 5$, calculați a_6

E1) Folosim $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

E2) Dar, $a_2 = 6$ și $a_3 = 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r = 6 \\ a_1 + 2r = 5 \end{cases} \quad | \cdot (-1)$

$\boxed{r = -1}$

Înlocuim $\Rightarrow a_1 + r = 6$

$a_1 - 1 = 6 \Rightarrow \boxed{a_1 = 7}$

E3) $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_6 = a_1 + 5r$

$\Rightarrow a_6 = 7 + 5 \cdot (-1)$

$\Rightarrow a_6 = 2$

Prof Ovidiu Badescu

Determinați soluțiile întregi ale ec.:

$$2x^2 - x - 3 \leq 0$$

E_1) ec. atașată: $2x^2 - x - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

E_2) pentru $\forall$ inec de gr II facem tabel de semne

x		-1		$3/2$	
$2x^2-x-3$	$+ +$	0	$- - -$	0	$+ +$

Deci, $2x^2 - x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3/2]$

Se cer sol întregi $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-1; 3/2] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1$

E_1) Cond.: $\begin{cases} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \Rightarrow x \in (-2;\infty) = I_1 \\ x-4>0 \Rightarrow x>4 \Rightarrow x \in (4;\infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2 = (-2;\infty) \cap (4;\infty) = (4;\infty)$

E_2) Folosim $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$

$\Rightarrow \log_3 \frac{x+2}{x-4} = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 3^1$

$\Rightarrow x+2 = 3(x-4) \Rightarrow x+2 = 3x-12$

$\Rightarrow x-2x = -12-2 \Rightarrow -x = -14$

$\Rightarrow x = 14 \in (4;\infty)$

$S_f : x = 14$

Prof. Ovidiu Bădescu

După o scumpire cu 5%, prețul unui produs crește cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire

---

E_1) Dacă x este prețul înainte de scumpire, după scumpire va fi $x + \frac{5}{100}x$ iar

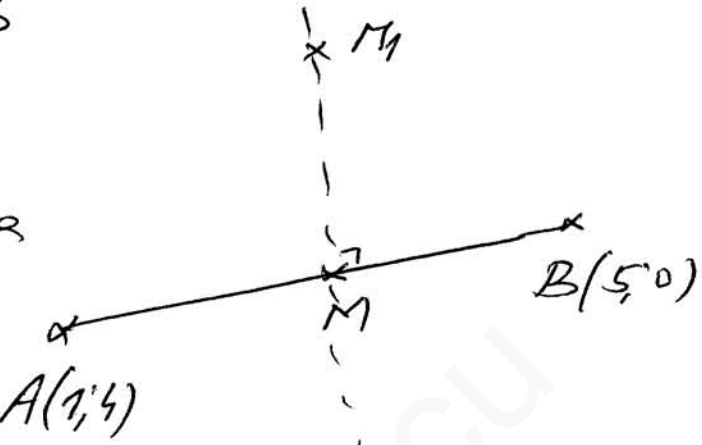
scumpirea va fi $\frac{5}{100}x$

E_2) Așadar, $\frac{5}{100}x = 12 \Rightarrow \frac{1}{20}x = 12$

$\Rightarrow x = 12 \cdot 20 \Rightarrow \boxed{x = 240}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(1;4)$, $B(5;0)$, găsiți ecuația mediatoarei lui AB



E_1) Fie MM_1 mediatoarea lui $AB \Rightarrow \begin{cases} MM_1 \perp AB \\ MM_1 \text{ trece prin mijl lui } AB \end{cases}$

E_2) M mijl lui $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1+5}{2} = 3 \\ y_M = \frac{4+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(3;2)$

E_3) $MM_1 \perp AB \Rightarrow m_{MM_1} \cdot m_{AB} = -1$

E_4) $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{5-1} = \frac{-4}{4} = -1$

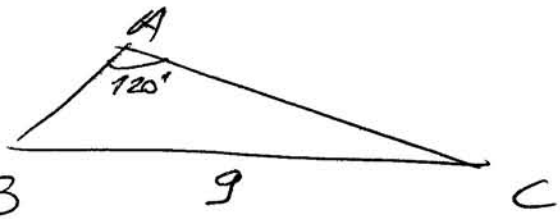
E_5) $\left.\begin{matrix} m_{MM_1} \cdot m_{AB} = -1 \\ m_{AB} = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = 1$

E_6) Fie $M(3;2)$, $m_{AB} = 1 \Rightarrow y - y_M = m_{MM_1}(x - x_M) \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 2 = 1(x-3) \Rightarrow y - 2 = x - 3 \Rightarrow \boxed{x - y - 1 = 0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați raza cercului circumscris ΔABC dacă $BC=9$ și $m(B\hat{A}C)=120^\circ$



$E_1)$ raza cercului circumscris este R și verifică:

$$\frac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{9}{\sin 120^\circ}=2R$$

$E_2)$ Dar, $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=$

$=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ=$

$=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_3)$ Din $\frac{9}{\sin 120^\circ}=2R \Rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R \Rightarrow$

$$9\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2R \Rightarrow \frac{18}{\sqrt{3}}=2R \Rightarrow R=\frac{18}{2\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\frac{9\sqrt{3}}{3}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$

Calculați $D(-1,1)$

E,) $D(-1,1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2+1+0+$

$+1-0-2=$

$=-2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$

Determinați $x \in \mathbb{Z}$ dacă $D(x,2010)=1$

$E_1)$ $D(x,2010)=1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2010 \\ 1 & x+1 & 2011 \end{vmatrix} = 1$

$E_2)$ $2011x+2010+(x+1)-x-2010(x+1)-2011=0$

$\Rightarrow 2011x+2010+x+1-x-2010x-2010-2011=0$

$\Rightarrow x-2010=0 \Rightarrow x=2010$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, arătați că $D(x,y)\cdot D(x,-y)=D(x^2,y^2)$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$

E1) $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}=x(y+1)+y+(x+1)-$
$-x-y(x+1)-(y+1)$

$=xy+x+y+x+1-x-yx-y-y-1=$

$=x-y$

E2) $D(x,-y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -y \\ 1 & x+1 & -y+1 \end{vmatrix}=x(-y+1)-y+(x+1)-$
$-x+y(x+1)-(-y+1)=$

$=-xy+x-y+x+1-x+xy+y+y-1=x+y$

E3) $D(x^2,y^2)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^2+1 & y^2+1 \end{vmatrix}=x^2(y^2+1)+y^2+(x^2+1)-$
$-x^2-y^2(x^2+1)-(y^2+1)=$

$=x^2y^2+x^2+y^2+x^2+1-x^2-x^2y^2-y^2-y^2-1=x^2-y^2$

E4) $D(x,y)\cdot D(x,-y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$
$D(x^2,y^2)=x^2-y^2$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$

Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$

E1) Calculăm $2(x-3)(y-3)+3 =$

$= 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 =$

$= 2xy - 6x - 6y + 21 = x * y$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, arătați că $*$ e asociativă

E_1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \overset{(?)}{\Rightarrow} (x*y)*z = x*(y*z)$

E_2) $(x*y)*z = (2xy - 6x - 6y + 21)*z =$

$= 2\cdot(2xy - 6x - 6y + 21)\cdot z - 6(2xy - 6x - 6y + 21) - 6z + 21$

$= 4xyz - 12xz - 12yz + 42z - 12xy + 36x + 36y - 126 - 6z + 21 =$

$= 4xyz - 12xz - 12yz - 12xy + 36x + 36y + 36z - 105 =$

$= 4xyz - 12(xz + yz + xy) + 36(x + y + z) - 105 \quad (1)$

E_3) $x*(y*z) = x*(2yz - 6y - 6z + 21) =$

$= 2x(2yz - 6y - 6z + 21) - 6x - 6(2yz - 6y - 6z + 21) + 21$

$= 4xyz - 12xy - 12xz + 42x - 6x - 12yz + 36y + 36z - 126 + 21$

$= 4xyz - 12(xy + xz + yz) + 36(x + y + z) - 105 \quad (2)$

E_4) Din (1) + (2) $\Rightarrow$ $*$ asociativă

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x*y = 2xy - 6x - 6y + 21$. Se știe că $x*y = 2(x-3)(y-3)+3$, calculați

$1*2*\ldots*2011$

E1) Din $x*y = 2(x-3)(y-3)+3$, observăm că

$x*3 = 2(x-3)(3-3)+3 = 2\cdot 0 + 3 = 3$ și

$3*x = 2(3-3)(x-3)+3 = 2\cdot 0 + 3 = 3$

E2) Fie $N = 1*2*3*\ldots*2011 =$

$= \underbrace{(1*2)}_{x} *3*(4*5*\ldots*2011) =$

$= 3*\underbrace{(4*5*\ldots*2011)}_{x} = 3$

$\Rightarrow 1*2*\ldots*2011 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$

Calculați $f'(0)$

$E_1)$ $f'(x) = (x^3 + x^2 + x + 3^x)' =$

$= 3x^2 + 2x + 1 + 3^x \ln 3$

$E_2|$ $f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 + 3^0 \cdot \ln 3$

$f'(0) = 1 + \ln 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+3^x$

Arătați că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ $f'(x)=\left(x^3+x^2+x+3^x\right)'=$

$=3x^2+2x+1+3^x\ln 3$

$E_2)$ semnul pentru $3x^2+2x+1$

$\Delta=b^2-4ac=4-12=-8<0$

$\Rightarrow 3x^2+2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2+2x+1$	$+$	$+$	$+$

$E_3)$ semnul pentru $3^x\ln 3>0$ (2)

$\forall a>0\Rightarrow a^{f(x)}>0$

$\ln 3>\ln 1\Rightarrow\ln 3>0$

$E_4)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=x^3+x^2+x+3^x$, arătați că:

$a^3+a^2+a-b^3-b^2-b \le 3^b-3^a, \forall a \le b$

E1) a arăta că

$a^3+a^2+a-b^3-b^2-b \le 3^b-3^a$ este

echivalent cu a arăta că

$a^3+a^2+a+3^a \le b^3+b^2+b+3^b$

$\Leftrightarrow f(a) \le f(b), \forall a \le b$

E2) $f'(x)=(x^3+x^2+x+3^x)'=3x^2+2x+1+3^x \ln 3$

$3x^2+2x+1=0$

$\Delta=4-12<0$

x	$\quad$
$3x^2+2x+1$	$+ + + + + +$

$\Rightarrow 3x^2+2x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

E3) $3^x>0$ și $\ln 3>\ln 1 \Rightarrow \ln 3>0 \Rightarrow 3^x \ln 3>0$ (2)

Din (1)+(2) $\Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f$ ↗ pe $\mathbb{R}$

E4) $\left.\begin{matrix} f \nearrow \text{pe } \mathbb{R} \\ a \le b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(a) \le f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3+a^2+a+3^a \le b^3+b^2+b+3^b \Rightarrow$

$a^3+a^2+a-b^3-b^2-b \le 3^b-3^a, \forall a \le b$

Prof. Ovidiu Pădescu

Fie $f_n(x) = x^n \cdot e^x$, calculați

$$\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}\,dx$$

$$E_1)\ I = \int_0^1 \frac{x e^x}{e^x}\,dx = \int_0^1 x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f_n(x) = x^n e^x$, calculați

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx$$

$E_1)$ $I = \int_0^1 x \cdot e^x\,dx$

$E_2)$ $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int e^x dx = e^x$

$E_3)$ $I = x \cdot e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx =$

$= (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - e^x \Big|_0^1 =$

$= (e - 0) - (e - e^0)$

$= e - e + 1 = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f_n(x) = x^n e^x$, se cere:

$$\int_0^1 f_n(x^2)\,dx \geq \frac{1}{2n+1}$$

$E_1)$ $I = \int_0^1 f_n(x^2)\,dx = \int_0^1 (x^2)^n e^{x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 x^{2n} \cdot e^{x^2}\,dx$$

$E_2)$ Atunci când se cere compararea unei integrale, se compară f_n din interior, apoi se integrează

$E_3)$ $0 \leq x \leq 1 \;/\;()^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow e^0 \leq e^{x^2} \leq e$$

$$\Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \;/\cdot x^{2n}$$

$$\Rightarrow x^{2n} \leq x^{2n} \cdot e^{x^2} \leq x^{2n} \cdot e$$

$E_4)$ Folosim $x^{2n} e^{x^2} \geq x^{2n} \;/\int_0^1 \ldots dx$

$$\Rightarrow I \geq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1 \Rightarrow I \geq \frac{1}{2n+1} - 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu